

中2数学B 2020年度春期講習 本問解答

§5 東大入試に挑戦

※ 欠席してしまった場合は、§4までの知識を活用して、問5.1～問5.3に自分で取り組んでみよう。

問5.1

- (1) $\triangle OQR$ にピタゴラスの定理を用いて、

$$OQ^2 = OR^2 + QR^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

なので、 $OQ = 5 (> 0)$ である。

よって、半径は $\boxed{5}$

- (2) (1)より、 $OA = 5$ だから、
 $AP = OA - OP = 5 - 3 = 2$ である。
 $\triangle APQ$ にピタゴラスの定理を用いて、

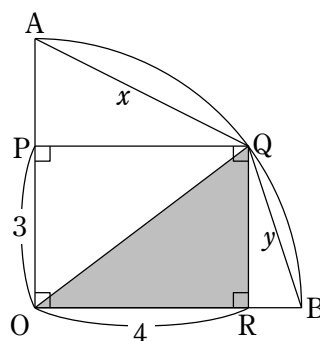
$$x^2 = AP^2 + PQ^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$

$$\therefore x = \sqrt{20} = \boxed{2\sqrt{5}} (> 0)$$

同様に、 $BR = OB - OR = 5 - 4 = 1$ なので、 $\triangle BRQ$ にピタゴラスの定理を用いて、

$$y^2 = BR^2 + RQ^2 = 1^2 + 3^2 = 10$$

$$\therefore y = \boxed{\sqrt{10}} (> 0)$$



問5.2

△BDE に注目する。

△BCE は $BC = CE$ の二等辺三角形であり、

$$\angle BCE = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$$

なので、

$$\angle CBE = \angle CEB = \frac{1}{2}(180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ$$

したがって、

$$\angle DBE = \angle DBC - \angle EBC = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$$

$$\angle DEB = \angle DEC - \angle CEB = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$$

である。よって、D から BE に下ろした垂線の足を

H とすると、△BDH は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形で、

△DEH は直角二等辺三角形になる。

すると、

$$\triangle BDH \text{ の } 3 \text{ 辺の比 } BD : DH : BH = 2 : 1 : \sqrt{3}$$

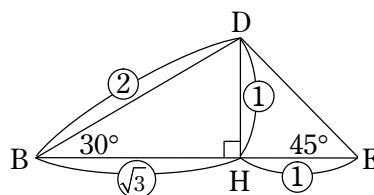
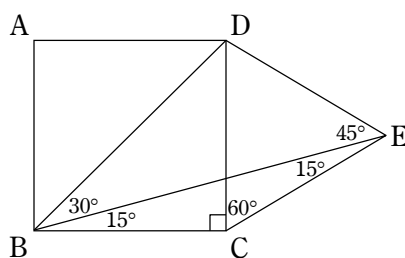
$$\triangle DEH \text{ の } 3 \text{ 辺の比 } DH : EH : DE = 1 : 1 : \sqrt{2}$$

より、

$$BD : BE = 2 : (\sqrt{3} + 1)$$

△ABD は直角二等辺三角形で $BD = \sqrt{2} \times AB = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$ なので、

$$BE = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \times BD = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) = \boxed{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$



問5.3

解1 問 5.1 の四分円において、弧 AB の長さが、

$$AQ + QB = x + y = 2\sqrt{5} + \sqrt{10}$$

より長くなることに注目してみよう。

弧 AB の長さは、

$$2 \times 5 \times \pi \times \frac{1}{4} = \frac{5}{2}\pi$$

なので、

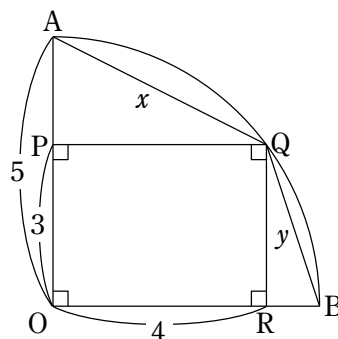
$$\frac{5}{2}\pi > 2\sqrt{5} + \sqrt{10} \quad \therefore \pi > \frac{2}{5} \times (2\sqrt{5} + \sqrt{10})$$

となる。ここで、

$$\sqrt{5} = 2.2360\cdots > 2.236, \quad \sqrt{10} = 3.1622\cdots > 3.162$$

であることを用いれば、

$$\pi > \frac{2}{5} \times (2\sqrt{5} + \sqrt{10}) > \frac{2}{5} \times (2 \times 2.236 + 3.162) = 3.0536 \quad \therefore \pi > 3.05$$



解2 問 5.2 において、E から BC の延長に下ろした垂線の足を F とおく。直角三角形 BEF に対し、B を中心として、BE を半径とする、中心角 15° の扇形 EBG を描くとき、弧 EG の長さが EF の長さより長くなることに注目してみよう。

弧 EG の長さは

$$2 \times (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \times \pi \times \frac{15^\circ}{360^\circ} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{12} \pi$$

なので、これが $EF = 1$ より長いことから

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{12} \pi > 1 \quad \therefore \pi > \frac{12}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

となる。

$$\sqrt{6} + \sqrt{2} = 2.449\cdots + 1.414\cdots < 2.45 + 1.42 = 3.87$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} > \frac{1}{3.87}$$

であることを用いれば、

$$\pi > \frac{12}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} > \frac{12}{3.87} = 3.10\cdots$$

$$\therefore \pi > 3.05$$

