

中2数学C 2020年度春期講習 本問解答

§1 平方根とルート記号

※ 欠席してしまった場合は、問 1.2～問 1.6 を(余裕があれば問 1.7 も) 自分で確認し、p.9 の宿題 H1.1～H1.4 に取り組んで提出してください。

問1.1

2 乗すると 2 となる正の数を(存在するとして) x とおく。

(1) $1^2 = 1 < x^2 = 2 < 2^2 = 4$ より、 $1 < x < 2$ である。

1 と 2 の間に整数はないので、 x は整数ではない。

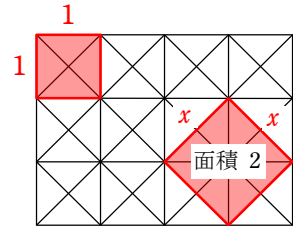
したがって、2 乗すると 2 となる整数は存在しない。

(2) $1.4^2 = 1.96 < x^2 = 2 < 1.5^2 = 2.25$ より、 $1.4 < x < 1.5$ なので、 $x = 1.4\dots$ である。

さらに、 $1.41^2 = 1.9881 < x^2 = 2 < 1.42^2 = 2.0164$ より、 $1.41 < x < 1.42$ なので、

$x = \boxed{1.41}\dots$ である。

(3) ピタゴラスは、右図のように、面積 2 の正方形の 1 辺の長さとして、2 乗すると 2 となる数 x の存在に気付いたといわれている。



問1.2

(1) 「2 乗して…になる数」には、正の数と負の数があることに注意しよう。

(i) $\boxed{3, -3}$

(ii) $\boxed{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$

(iii) 2 乗して負の数になる実数はないので、答は $\boxed{\text{なし}}$ である。

(2) 「2 乗したらいくつになるか」を問われているだけである。

(i) $4 = \sqrt{4^2} = \sqrt{\boxed{16}}$

(ii) $0.9 = \sqrt{0.9^2} = \sqrt{\boxed{0.81}}$

(iii) $\pi = \sqrt{\boxed{\pi^2}}$

問1.3

$\sqrt{\quad}$ を用いて表されるのは、平方根のうち、正のものであることに注意しよう。

$$(1) \quad \sqrt{9} = \sqrt{3^2} = \boxed{3}$$

$$(2) \quad \sqrt{\frac{1}{9}} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$(3) \quad \sqrt{1.69} = \sqrt{1.3^2} = \boxed{1.3}$$

$$(4) \quad \sqrt{\frac{1}{1.69}} = \sqrt{\left(\frac{1}{1.3}\right)^2} = \frac{1}{1.3} = \boxed{\frac{10}{13}}$$

$$(5) \quad \sqrt{\frac{16}{25}} = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

$$(6) \quad \sqrt{\frac{25}{16}} = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2} = \boxed{\frac{5}{4}}$$

(7) $\sqrt{\pi}$ は「2 乗したら π になる正の数」なので、2 乗したら当然 π になる。

$$\therefore (\sqrt{\pi})^2 = \boxed{\pi}$$

(8) $-\sqrt{\pi}$ は「2 乗したら π になる負の数」なので、2 乗したら当然 π になる。

$$\therefore (-\sqrt{\pi})^2 = \boxed{\pi}$$

(9) $\sqrt{(-\pi)^2}$ は「 $(-\pi)^2$ の平方根 $-\pi, \pi$ のうち、正のもの」なので、 π になる。

$$\therefore \sqrt{(-\pi)^2} = \boxed{\pi}$$

(10) $\sqrt{\sqrt{5}}$ は「2 乗して $\sqrt{5}$ になる正の数」なので、2 乗したら当然 $\sqrt{5}$ になる。

$$\therefore (\sqrt{\sqrt{5}})^2 = \boxed{\sqrt{5}}$$

問1.4

- (1) 面積 a, b の正方形の 1 辺の長さがそれぞれ $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ となる。
 2 つの正方形のうち、面積が大きい方と、1 辺の長さが長い方は一致するので、
 $a < b$ であることと $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ であることは同じこと ☆
 になる。

- (2) ☆を利用して、 $\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{5}, 2 = \sqrt{4}$ の大きさを比べると、

$$3 < 4 < 5 < 7 \quad \text{より} \quad \sqrt{3} < \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{7}$$

となる。よって、 $\boxed{\sqrt{3} < 2 < \sqrt{5} < \sqrt{7}}$ である。

- (3) $\pi^2 < 3.15^2 = 9.9225 < 10$ なので、☆より

$$\boxed{\pi < \sqrt{10}}$$

と分かる。

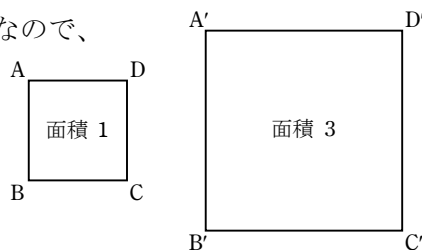
※ $\sqrt{10} = 3.16\cdots$ である。

問1.5

相似比が $x:y$ のとき、面積比は $x^2:y^2$ なので、
 面積比が $S:T$ のとき、相似比は $\sqrt{S}:\sqrt{T}$ となる。

- (1) 正方形 ABCD と正方形 A'B'C'D' の面積比が $1:3$ なので、
 相似比は $AB:A'B' = 1:\sqrt{3}$ となる。

つまり、A'B' の長さは AB の長さの $\boxed{\sqrt{3}}$ 倍
 である。

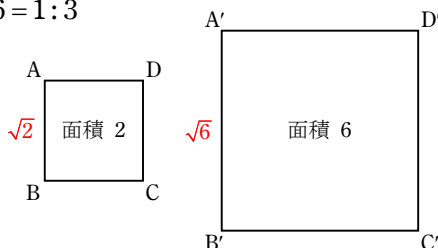


- (2) 正方形 ABCD と正方形 A'B'C'D' の面積比が $2:6 = 1:3$

なので、相似比は $AB:A'B' = 1:\sqrt{3}$ ，すなわち、
 正方形 A'B'C'D' は、正方形 ABCD を、
 $(\boxed{\sqrt{3}})$ 倍に相似拡大したものである。

したがって、 $A'B' = \sqrt{3} \times AB$ で、
 $AB = \sqrt{2}$ ， $A'B' = \sqrt{6}$ なので、

$$\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \boxed{\sqrt{3}}$$



- (3) 面積 a の正方形 $ABCD$ と面積 ab の正方形 $A'B'C'D'$

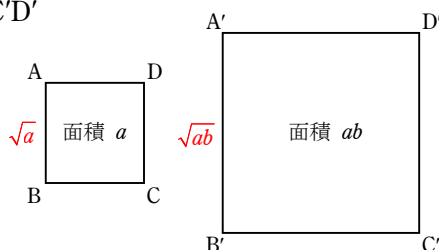
を考える。面積比が $a:ab=1:b$ なので、

相似比は $\sqrt{1}:\sqrt{b}=1:\sqrt{b}$ となる。

したがって、 $A'B'=\sqrt{b}\times AB$ で、

$AB=\sqrt{a}$, $A'B'=\sqrt{ab}$ なので、

$$\boxed{\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}}$$



が成り立つことが分かった。

これは次のように代数的に示すこともできる：

$$\begin{aligned} (\sqrt{a}\sqrt{b})^2 &= (\sqrt{a}\times\sqrt{b})\times(\sqrt{a}\times\sqrt{b}) \\ &= \sqrt{a}\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{b} \\ &= (\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2 \\ &= a\times b = ab \end{aligned}$$

なので、 $\sqrt{a}\sqrt{b}$ は ab の平方根である。

また、 $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ は正の数なので、 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ も正の数である。

以上より、 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ は ab の正の平方根であり、これは $\sqrt{ab}$ に他ならない。

- (4) 面積 a の正方形 $ABCD$ と面積 b の正方形 $A'B'C'D'$

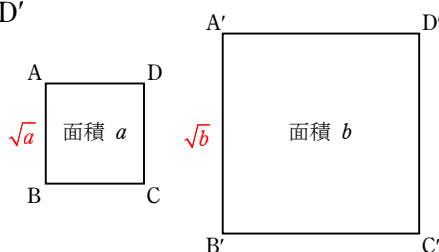
を考える。面積比が $a:b=1:\frac{b}{a}$ なので、

相似比は $\sqrt{1}:\sqrt{\frac{b}{a}}=1:\sqrt{\frac{b}{a}}$ となる。

したがって、 $A'B'=\sqrt{\frac{b}{a}}\times AB$ で、

$AB=\sqrt{a}$, $A'B'=\sqrt{b}$ なので、

$$\sqrt{a}\times\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{b} \quad \therefore \boxed{\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{b}{a}}}$$



が成り立つことが分かった。

これは次のように、(3)の結果を使って、代数的に示すこともできる：

$a, \frac{b}{a}$ は正の数なので、(3)より、

$$\sqrt{a}\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{a\times\frac{b}{a}}=\sqrt{b} \quad \therefore \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{b}{a}}$$

問1.6

$$(1) \sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{\boxed{6}}$$

$$(2) \sqrt{3}\sqrt{5} = \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{\boxed{15}}$$

$$(3) 2\sqrt{3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{\boxed{12}}$$

$$(4) 3\sqrt{3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{\boxed{27}}$$

$$(5) \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{\boxed{1}}{3}}$$

$$(6) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{\boxed{2}}{3}}$$

$$(7) \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{\boxed{4}}{3}}$$

$$(8) \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{9}{3}} = \sqrt{\boxed{3}}$$

問1.7

B4 と B5 の面積比は 2:1 なので、相似比は $\sqrt{2}:1$ である。

(1) B4→B5 のコピーの倍率は $\frac{\boxed{1}}{\sqrt{2}}$ 倍。

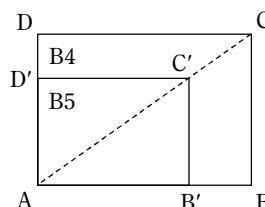
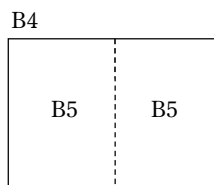
(2) B5→B4 のコピーの倍率は $\boxed{\sqrt{2}}$ 倍。

(3) (2)より、B5 の短辺の長さ $B'C'$ を $\sqrt{2}$ 倍すると、B4 の短辺の長さ BC となる。これは、B5 の長辺の長さ AB' と同じ長さである。よって、B5 の短辺と長辺の長さの比が $\boxed{B'C':AB'=1:\sqrt{2}}$ と分かる。

さらに、このことから $B'C' = \frac{1}{\sqrt{2}} AB'$ であるが、一方で

$$B'C' = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} AB' = \frac{\sqrt{2}}{2} AB' \text{ でもあるので、}$$

$$\frac{\boxed{1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ であることも分かる。これについては、§3 で再確認する。}$$



問1.8

- (1) 有理数の範囲に2乗して2になる数があるかどうかを考えたいが、まず

「整数でない有理数を2乗して整数になるか」

という問題を考える。

整数でない有理数 r は、

$$r = \frac{n}{m} \quad (m \text{ は } 1 \text{ でない自然数、} n \text{ は整数であり、} m, n \text{ は互いに素})$$

と、既約分数に表せる。このとき、

$$r^2 = \left(\frac{n}{m} \right)^2 = \frac{n^2}{m^2}$$

だが、 m, n が互いに素、つまり、 m, n を素因数分解したとき共通の素数が現れないとき、 m^2, n^2 の素因数分解に共通して現れる素数もないので、 m^2, n^2 は互いに素

な自然数となり、 $\frac{n^2}{m^2}$ は既約分数となっている。さらに、 $m \neq 1$ より、分母 m^2 は1

でないので、 r^2 は整数とはならない。

つまり、

「整数でない有理数を2乗しても整数にはならない」……………☆
ということが分かった。

さて、 $\sqrt{2}$ は2乗して整数になる数である。☆より、このような数がある有理数のなかにあるとしたら、それは整数である。ところが、2は平方数ではないので、整数のなかに2乗して2になる数はない。

したがって、2乗して2になる数は有理数のなかにはなく、 $\sqrt{2}$ は有理数ではない（つまり無理数である）ことが示された。

- (2) (1)と全く同様である。

- (3) 背理法で証明する。

$x = 2 + \sqrt{3}$ とおき、これが有理数だと仮定する。すると、 $\sqrt{3} = x - 2$ で、 x が有理数であるという仮定より、この右辺も有理数となる。ところが、3は平方数ではないので、(2)より $\sqrt{3}$ は有理数ではなく、これは矛盾。よって、 $x = 2 + \sqrt{3}$ は無理数である。