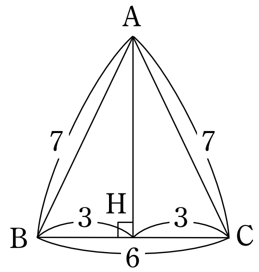
中2数学C　2020年度春期講習　本問解答
§4　ピタゴラスの定理の応用

※　欠席してしまった場合は、問 4.1, 本解答 p.3 の「三角定規の 3 辺の長さの比」, 問 4.3～問 4.5 を（余裕があれば問 4.2, 問 4.6 も）自分で確認し、p.24, p.25 の宿題 H4.1～H4.4 に取り組んで提出してください。

問4.1

まず、(i)の二等辺三角形について考える。



(1)　AB = AC の二等辺三角形なので、A から BC に下ろした垂線の足を H とすると、BH = CH = 3 となる。
△ABH にピタゴラスの定理を用いて、

$$7^2 = 3^2 + \mathrm{AH}^2$$

$$\mathrm{AH}^2 = 7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40$$

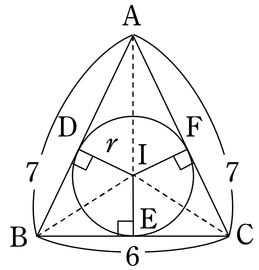
$$\therefore \mathrm{AH} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \quad （\mathrm{AH} > 0 \text{ より}）$$

したがって、

$$S = \frac{1}{2} \times \mathrm{BC} \times \mathrm{AH} = \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{10} = \boxed{6\sqrt{10}}$$

で、これを小数第 1 位まで正確に求めると、$\sqrt{10} = 3.162\cdots$ なので、

$$S = 6\sqrt{10} = \boxed{18.9}\cdots$$



(2)　内接円の中心 (内心) を I とし、内接円と辺 AB, BC, CA との接点をそれぞれ D, E, F とすると、ID, IE, IF は辺 AB, BC, CA と垂直である（E は BC の中点となり、H と一致するが、このことは今は使わない)。
したがって、S は、r を用いて

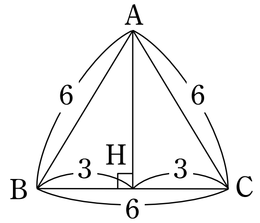
$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{IAB} + \triangle\mathrm{IBC} + \triangle\mathrm{ICA} \\ &= \frac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{ID} + \frac{1}{2} \times \mathrm{BC} \times \mathrm{IE} + \frac{1}{2} \times \mathrm{CA} \times \mathrm{IF} \\ &= \frac{1}{2} \times 7 \times r + \frac{1}{2} \times 6 \times r + \frac{1}{2} \times 7 \times r \\ &= \frac{1}{2} \times (7 + 6 + 7) \times r = 10r \end{aligned}$$

と表せる。よって、(1)の結果とあわせて

$$10r = 6\sqrt{10} \qquad \therefore r = 6\sqrt{10} \times \frac{1}{10} = \boxed{\frac{3\sqrt{10}}{5}}$$

(ii)についてもまったく同様である。

(1) A から BC に下ろした垂線の足を H とすると、



$$\mathrm{AH} = \sqrt{6^2 - 3^3} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

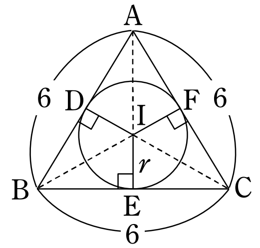
$$\therefore S = \frac{1}{2} \times \mathrm{BC} \times \mathrm{AH} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} = \boxed{9\sqrt{3}}$$

で、これを小数第 1 位まで正確に求めると、

$\sqrt{3} = 1.732\cdots$ なので

$$S = 9 \times \sqrt{3} = \boxed{15.5}\cdots$$

(2) 内接円の中心を I とし、内接円と辺 AB, BC, CA との接点をそれぞれ D, E, F とすると、



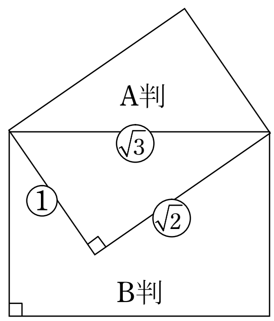
$$\begin{aligned} S &= \triangle \mathrm{IAB} + \triangle \mathrm{IBC} + \triangle \mathrm{ICA} \\ &= \frac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{ID} + \frac{1}{2} \times \mathrm{BC} \times \mathrm{IE} + \frac{1}{2} \times \mathrm{CA} \times \mathrm{IF} \\ &= \frac{1}{2} \times (6+6+6) \times r = 9r \end{aligned}$$

と表せる。よって、(1)の結果とあわせて

$$9r = 9\sqrt{3} \qquad \therefore r = 9\sqrt{3} \times \frac{1}{9} = \boxed{\sqrt{3}}$$

問4.2

(1) A4 判の対角線の長さと B4 判の長い方の辺の長さが同じになる。



(2) (1)で述べた関係は、A0 判と B0 判についても同じである。また、問 1.7 でみたように、コピー用紙の長い方の辺と短い方の辺の比は $\sqrt{2}:1$（これは A 判でも B 判でも同様）である。

よって、A0 判の短い方の辺を x とおくと、長い方の辺は $\sqrt{2}\,x$ で、右図の A 判, B 判の重なりの直角三角形にピタゴラスの定理を用いれば、B0 判の長い方の辺は

$$\sqrt{x^2 + \left(\sqrt{2}\,x\right)^2} = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}\,x$$

となる。したがって、A0 判と B0 判の相似比は $\sqrt{2}\,x : \sqrt{3}\,x = \sqrt{2} : \sqrt{3}$ である。

これより面積比は $2:3$ と分かるから、B0 判の面積は A0 判の面積の 1.5 倍で、$\boxed{1.5\,\mathrm{m}^2}$ である。

三角定規の 3 辺の長さの比

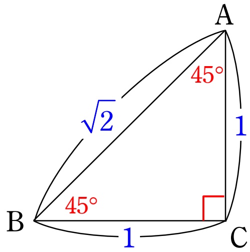
$AC = BC = 1$ の直角二等辺三角形 ABC の斜辺 AB の長さは、ピタゴラスの定理より

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$\therefore AB = \sqrt{2} \quad (AB > 0 \text{ なので})$$

となり、3 辺の長さは右図のようになる。

すべての直角二等辺三角形は△ABC と相似なので、3 辺の長さの比は右図の△ABC と同じになる。



$\angle A = 30°, \angle B = 60°, \angle C = 90°$ で、 $AB = 2$ の直角三角形 ABC は、右図の正三角形 ABD の半分になっていて、$BC = CD = 1$ である。△ABC にピタゴラスの定理を用いて、

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

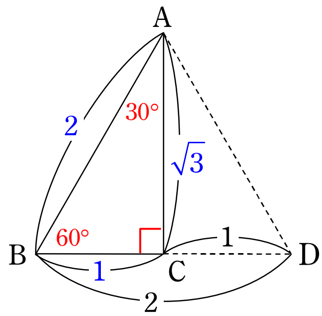
$$2^2 = AC^2 + 1^2$$

$$AC^2 = 4 - 1 = 3$$

$$\therefore AC = \sqrt{3} \quad (AC > 0 \text{ より})$$

となり、3 辺の長さは右図のようになる。

30°, 60°, 90° の三角定規の形の直角三角形は、すべて△ABC と相似なので、3 辺の長さの比は右図の△ABC と同じになる。



問4.3

(1) △ABDは直角二等辺三角形なので、3辺の比は

$$\mathrm{BA}:\mathrm{AD}:\underline{\underline{\mathrm{BD}}}=1:1:\sqrt{2}\ (=\sqrt{2}:\sqrt{2}:\underline{\underline{2}})$$

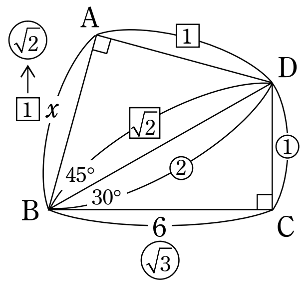
であり、また、△BDC は$30°, 60°, 90°$の直角三角形なので、3辺の比は

$$\underline{\underline{\mathrm{BD}}}:\mathrm{DC}:\mathrm{BC}=\underline{\underline{2}}:1:\sqrt{3}$$

である。よって、

$$\mathrm{BA}:\mathrm{BD}:\mathrm{BC}=\sqrt{2}:2:\sqrt{3}$$

となり、$x=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\mathrm{BC}=\dfrac{\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{3}}_{1}}\times\cancel{6}^{2\sqrt{3}}=\sqrt{2}\times2\sqrt{3}=\boxed{2\sqrt{6}}$



(2) AからBCに下した垂線の足をHとすると、△ABHは$30°, 60°, 90°$の直角三角形なので、3辺の比は

$$\mathrm{AB}:\mathrm{BH}:\mathrm{HA}=2:1:\sqrt{3}$$

よって、$\mathrm{AB}=4$より、

$$\mathrm{BH}=\mathrm{AB}\times\frac{1}{2}=4\times\frac{1}{2}=2$$

$$\mathrm{AH}=\mathrm{BH}\times\sqrt{3}=2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

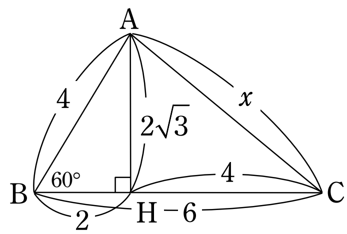
$$\mathrm{CH}=\mathrm{BC}-\mathrm{BH}=6-2=4$$

と求まる。

すると、△ACHにピタゴラスの定理を用いて、

$$x^2=\mathrm{AC}^2=4^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2=16+12=28$$

よって、$x>0$より、$x=\sqrt{28}=\boxed{2\sqrt{7}}$



(3) AからBCに下した垂線の足をHとする。

△ABHは直角二等辺三角形なので、3辺の比は

$$\mathrm{AH}:\mathrm{BH}:\mathrm{AB}=1:1:\sqrt{2}$$

であり、また、△ACHは$30°, 60°, 90°$の直角三角形なので、3辺の比は

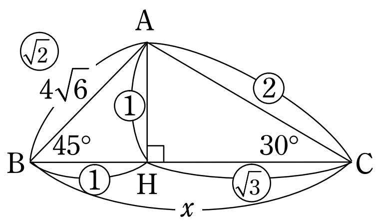
$$\mathrm{AC}:\mathrm{AH}:\mathrm{HC}=2:1:\sqrt{3}$$

となっている。よって、

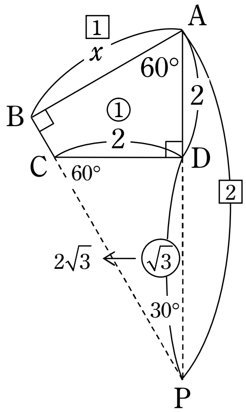
$$\mathrm{AB}:\mathrm{BC}=\mathrm{AB}:(\mathrm{BH}+\mathrm{HC})=\sqrt{2}:\left(1+\sqrt{3}\right)$$

なので、

$$x=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times\mathrm{AB}=\frac{1+\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{2}}_{1}}\times4\cancel{\sqrt{6}}^{\sqrt{3}}=\left(1+\sqrt{3}\right)\times4\sqrt{3}=\boxed{4\sqrt{3}+12}$$



(4) BC と AD の交点を P とすると、△PAB と△PCD はともに $30°, 60°, 90°$ の直角三角形になる。



まず、△PCD に着目して、

$$CD : DP = 1 : \sqrt{3}$$

$$\therefore DP = \sqrt{3} \times CD = 2\sqrt{3}$$

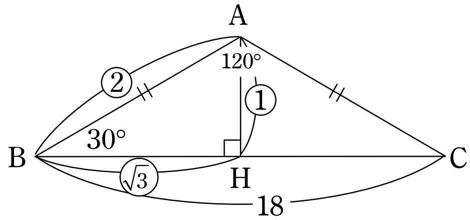
よって、 $AP = AD + DP = 2 + 2\sqrt{3}$ と分かる。

すると、△PAB に着目して、

$$AP : AB = 2 : 1$$

$$\therefore AB = \frac{1}{2} \times AP = \frac{1}{2} \times \left(2 + 2\sqrt{3}\right) = \boxed{1 + \sqrt{3}}$$

(5) $AB = AC$ の二等辺三角形なので、A から BC に下ろした垂線の足を H とすると、$BH = CH = 9$ となる。



△ABH は $30°, 60°, 90°$ の直角三角形なので、

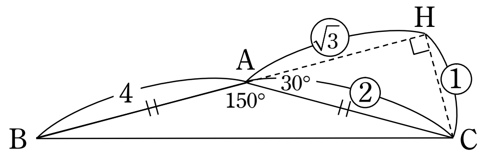
$$AH : BH = 1 : \sqrt{3}$$

$$\therefore AH = \frac{1}{\sqrt{3}} \times BH = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 9 = 3\sqrt{3}$$

よって、

$$S = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times 18 \times 3\sqrt{3} = \boxed{27\sqrt{3}}$$

(6) C から BA の延長に下した垂線の足を H とすると、△CAH は $30°, 60°, 90°$ の直角三角形なので、



$$AC : CH = 2 : 1$$

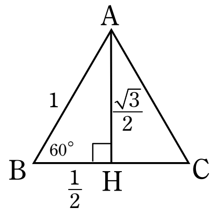
$$\therefore CH = \frac{1}{2} \times AC = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

よって、

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times CH = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = \boxed{4}$$

問4.4

(1)　1辺の長さが1の正三角形ABCにおいて、



AからBCに下ろした垂線の足をHとすると、

$$AH=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$ となり、

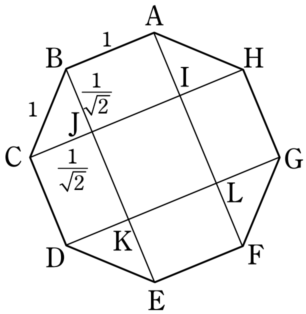
求める面積は、

$$\frac{1}{2}\times BC\times AH=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

これを小数第2位まで求めると、$\sqrt{3}=1.732\cdots$ なので

$$\frac{1.732\cdots}{4}=\boxed{0.43}\cdots$$

1辺の長さが1の正八角形ABCDEFGHは、



右図のように対角線の交点をI,J,K,Lとおくと、

直角二等辺三角形BCJが4つ分と、長方形ABJIが

4つ分と、正方形IJKLが1つ分に分けられる。

よって、

$$4\times\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\times\frac{1}{2}\right\}+4\times\left(1\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+1^2$$

$$=1+2\sqrt{2}+1=2+2\sqrt{2}$$

これを小数第2位まで求めると、$\sqrt{2}=1.414\cdots$

$$2+2\times1.414\cdots=\boxed{4.82}\cdots$$

問4.5

△BDE に注目する。

△BCE は $BC = CE$ の二等辺三角形であり、

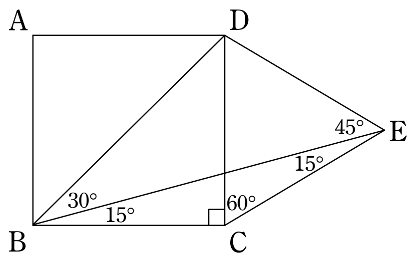
$$\angle BCE = 90° + 60° = 150°$$

なので、

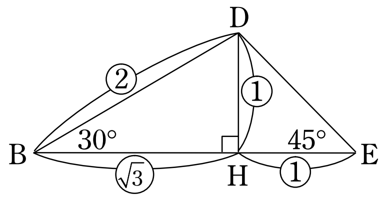
$$\angle CBE = \angle CEB = \frac{1}{2}(180° - 150°) = 15°$$

したがって、

$$\angle DBE = \angle DBC - \angle EBC = 45° - 15° = 30°$$
$$\angle DEB = \angle DEC - \angle CEB = 60° - 15° = 45°$$



である。よって、D から BE に下ろした垂線の足を H とすると、△BDH は 30°, 60°, 90° の直角三角形で、△DEH は直角二等辺三角形になる。



すると、

△BDH の 3 辺の比　$BD : DH : BH = 2 : 1 : \sqrt{3}$

△DEH の 3 辺の比　$DH : EH : DE = 1 : 1 : \sqrt{2}$

より、

$$BD : BE = 2 : \left(\sqrt{3} + 1\right)$$

△ABD は直角二等辺三角形で $BD = \sqrt{2} \times AB = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$ なので、

$$BE = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \times BD = \frac{\sqrt{3}+1}{{}_{1}\cancel{2}} \times {}^{1}\cancel{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right) = \boxed{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

これを小数第 1 位まで求めると、$\sqrt{6} = 2.44\cdots$, $\sqrt{2} = 1.41\cdots$ なので、

$$\sqrt{6} + \sqrt{2} = 2.44\cdots + 1.41\cdots = \boxed{3.8}\cdots$$

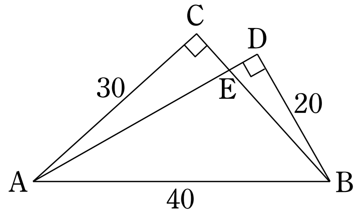
問4.6

△ABC にピタゴラスの定理を用いて、

$$40^2 = 30^2 + \mathrm{BC}^2$$

$$\mathrm{BC}^2 = 40^2 - 30^2 = 1600 - 900 = 700$$

$$\therefore \mathrm{BC} = \sqrt{700} = 10\sqrt{7}\ (>0) \cdots\cdots\cdots ①$$



△ABD にピタゴラスの定理を用いて、

$$40^2 = \mathrm{AD}^2 + 20^2$$

$$\mathrm{AD}^2 = 40^2 - 20^2 = 1600 - 400 = 1200$$

$$\therefore \mathrm{AD} = \sqrt{1200} = 20\sqrt{3}\ (>0) \cdots\cdots\cdots ②$$

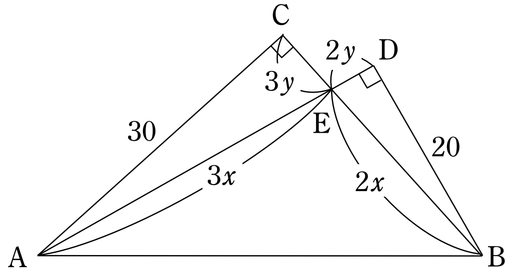
一方、△ACE と△BDE において、

$\angle\mathrm{ACE} = \angle\mathrm{BDE}$ （$=90°$）

$\angle\mathrm{AEC} = \angle\mathrm{BED}$ （対頂角）

なので、

△ACE ∽ △BDE （二角相等）



△ACE と△BDE の相似比は

$\mathrm{AC} : \mathrm{BD} = 30 : 20 = 3 : 2$

なので、

$\mathrm{AE} : \mathrm{BE} = 3 : 2$

$\mathrm{CE} : \mathrm{DE} = 3 : 2$

となる。よって、$\mathrm{AE} = 3x, \mathrm{CE} = 3y$ とおくと、$\mathrm{BE} = 2x, \mathrm{DE} = 2y$ で、①, ② より

$$2x + 3y = 10\sqrt{7} \cdots\cdots\cdots ③$$

$$3x + 2y = 20\sqrt{3} \cdots\cdots\cdots ④$$

④×3－③×2 より

$$\begin{array}{rl} 9x + 6y = 60\sqrt{3} & \quad\ldots\ldots ④\times 3 \\ -)\ 4x + 6y = 20\sqrt{7} & \quad\ldots\ldots ③\times 2 \\ \hline 5x \qquad = 60\sqrt{3} - 20\sqrt{7} & \end{array}$$

よって、$x = 12\sqrt{3} - 4\sqrt{7}$ で、

$$\mathrm{AE} = 3\left(12\sqrt{3} - 4\sqrt{7}\right) = \boxed{36\sqrt{3} - 12\sqrt{7}}$$