

中2数学C 2020年度春期講習 本問解答

§5 東大入試に挑戦

※ 欠席してしまった場合は、§4 までの知識を活用して、問 5.1 に自分で取り組んでみよう。

問5.1

(1)

解1 問 4.5 において、E から BC の延長に下ろした垂線の足を F とおき、1 つの鋭角が 15° の直角三角形 BEF を作る。このとき、

$EF = \frac{1}{2}AB = 1$ に対し、斜辺の長さが $BE = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

となる。ここに、B を中心として、BE を半径とする、中心角 15° の扇形 EBG を描くとき、弧 EG の長さが EF の長さより長くなることに注目してみよう。

弧 EG の長さは

$$2 \times (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \times \pi \times \frac{15^\circ}{360^\circ} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{12} \pi$$

なので、これが $EF = 1$ より長いことから

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{12} \pi > 1 \quad \therefore \pi > \frac{12}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

となる。

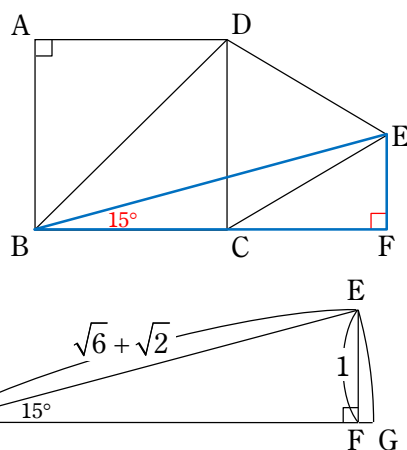
$$\sqrt{6} + \sqrt{2} = 2.449\cdots + 1.414\cdots < 2.45 + 1.42 = 3.87$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} > \frac{1}{3.87}$$

であることを用いれば、

$$\pi > \frac{12}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} > \frac{12}{3.87} = 3.10\cdots$$

$$\therefore \pi > 3.05$$



解2 H4.3 の四分円において、弧 AB の長さが、

$$AQ + QB = x + y = 2\sqrt{5} + \sqrt{10}$$

より長くなることに注目してみよう。

弧 AB の長さは、

$$2 \times 5 \times \pi \times \frac{1}{4} = \frac{5}{2}\pi$$

なので、

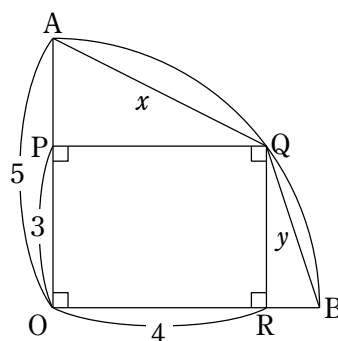
$$\frac{5}{2}\pi > 2\sqrt{5} + \sqrt{10} \quad \therefore \pi > \frac{2}{5} \times (2\sqrt{5} + \sqrt{10})$$

となる。ここで、

$$\sqrt{5} = 2.2360\ldots > 2.236, \quad \sqrt{10} = 3.1622\ldots > 3.162$$

であることを用いれば、

$$\pi > \frac{2}{5} \times (2\sqrt{5} + \sqrt{10}) > \frac{2}{5} \times (2 \times 2.236 + 3.162) = 3.0536 \quad \therefore \pi > 3.05$$



(2) 方針のみ示す。

(1)の**解1**は、円に内接する正12角形の周の長さと円周を比較しているともいえる。それによって、 $\pi > 3.10\ldots$ を得た。(このような不等式を π の「下からの評価」という。)

円に**外接する**正12角形の周の長さと円周を比較すれば、 $\pi < 3.21\ldots$ という「上からの評価」も得られる。

例えば、より細かく円に内・外接する正24角形、正48角形、…と考えていくと、より精度の高い評価を得ることができる。どこまでいけるか挑戦してみよう。