

中2数学C 2020年度春期 宿題解答

§4 ピタゴラスの定理の応用

H4.1

- (1) ピタゴラスの定理より、

$$x^2 + 21^2 = 29^2$$

$$x^2 = 29^2 - 21^2 = 841 - 441 = 400 = 20^2$$

よって、 $x > 0$ より、 $x = \boxed{20}$

- (2) $\triangle ABC$ にピタゴラスの定理を用いて、

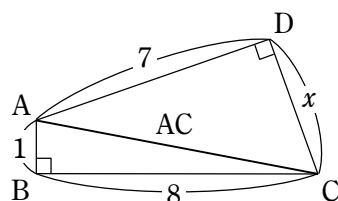
$$AC^2 = 1^2 + 8^2 = 65$$

$\triangle ADC$ にピタゴラスの定理を用いて、

$$AC^2 = x^2 + 7^2$$

$$\therefore x^2 = 65 - 49 = 16$$

よって、 $x > 0$ より、 $x = \boxed{4}$



- (3) A から BC に下した垂線の足を H とすると、
 $\triangle ABH$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形なので、
 3 辺の比は

$$BA : AH : HB = 2 : 1 : \sqrt{3}$$

また、 $\triangle ACH$ は直角二等辺三角形なので、
 3 辺の比は

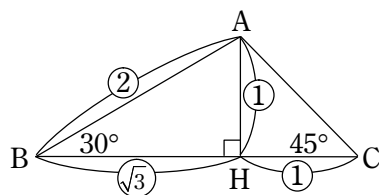
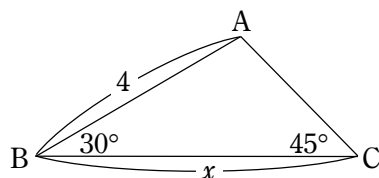
$$AH : CH : AC = 1 : 1 : \sqrt{2}$$

よって、

$$AB : BC = 2 : (\sqrt{3} + 1)$$

となり、

$$x = BC = AB \times \frac{\sqrt{3} + 1}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{3} + 1}{2} = \boxed{2(\sqrt{3} + 1)}$$



H4.2

- (1) D を通り AB に平行な直線を引き、BC との交点を P とすると、ABPD は平行四辺形で、DP, BP, CP の長さは右図のようになる。

△CDP にピタゴラスの定理を用いて、

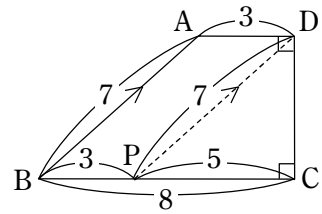
$$5^2 + CD^2 = 7^2$$

$$CD^2 = 7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$$

よって、 $CD > 0$ より、 $CD = 2\sqrt{6}$ である。

したがって、台形 ABCD の面積は

$$\frac{1}{2} \times (AD + BC) \times CD = \frac{1}{2} \times (3 + 8) \times 2\sqrt{6} = \boxed{11\sqrt{6}}$$



- (2) D を通り AB に平行な直線を引き、BC との交点を P とすると、ABPD は平行四辺形で、DP, BP, CP の長さは右図のようになる。

△CDP は $DP = DC$ の二等辺三角形なので、D から PC に下した垂線の足を H とすると、H は PC の中点であり、

$$PH = HC = 2$$

となる。

△DPH にピタゴラスの定理を用いて、

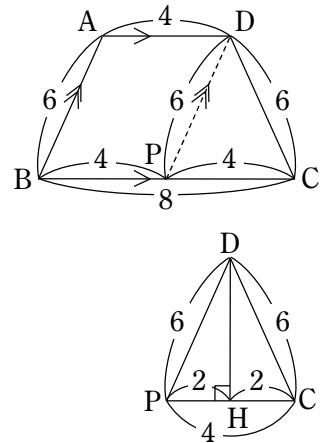
$$2^2 + DH^2 = 6^2$$

$$DH^2 = 6^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32$$

よって、 $DH > 0$ より、 $DH = 4\sqrt{2}$ である。

したがって、台形 ABCD の面積は

$$\frac{1}{2} \times (AD + BC) \times DH = \frac{1}{2} \times (4 + 8) \times 4\sqrt{2} = \boxed{24\sqrt{2}}$$



H4.3

- (1) $\triangle OQR$ にピタゴラスの定理を用いて、

$$OQ^2 = OR^2 + QR^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

$$\therefore OQ = 5 (> 0)$$

とわかる。よって、半径は $\boxed{5}$

- (2) (1)より $OA = 5$ だから、 $AP = OA - OP = 5 - 3 = 2$ なので、 $\triangle APQ$ にピタゴラスの定理を用いて、

$$x^2 = AP^2 + PQ^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$

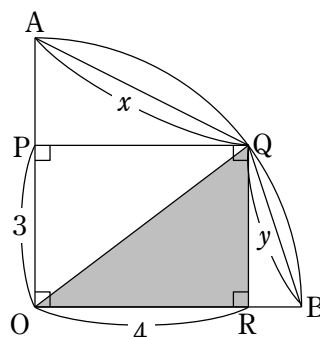
$$\therefore x = \sqrt{20} = \boxed{2\sqrt{5}} (> 0)$$

同様に、 $BR = OB - OR = 5 - 4 = 1$ なので、

$\triangle BRQ$ にピタゴラスの定理を用いて、

$$y^2 = BR^2 + RQ^2 = 1^2 + 3^2 = 10$$

$$\therefore y = \boxed{\sqrt{10}} (> 0)$$



H4.4

- (1) A から BC に下した垂線の足を H とすると、 $\triangle ABH$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形なので、3 辺の比は

$$AB : BH : HA = 2 : 1 : \sqrt{3}$$

よって、 $AB = 6$ より、

$$BH = AB \times \frac{1}{2} = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

$$AH = BH \times \sqrt{3} = 3 \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

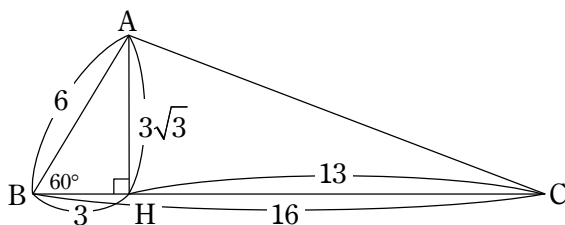
$$CH = BC - BH = 16 - 3 = 13$$

と求まる。

すると、 $\triangle ACH$ にピタゴラスの定理を用いて、

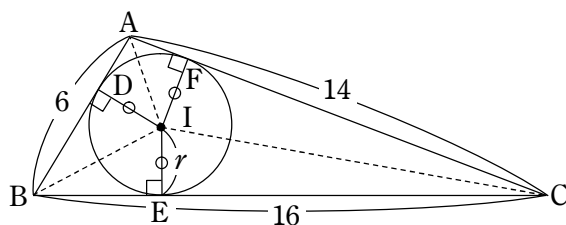
$$AC^2 = 13^2 + (3\sqrt{3})^2 = 169 + 27 = 196 = 14^2$$

よって、 $AC > 0$ より、 $AC = \boxed{14}$ である。



- (2) $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times 16 \times 3\sqrt{3} = \boxed{24\sqrt{3}}$

- (3) 内接円の中心をI、半径を r とし、
内接円とAB, BC, CAとの接点を
それぞれD, E, Fとおく。
半径ID, IE, IFは、それぞれ辺AB,
BC, CAと垂直なので、 $\triangle ABC$ の
面積は、 r を用いて



$$\begin{aligned}\triangle ABC &= \triangle IAB + \triangle IBC + \triangle ICA \\ &= \frac{1}{2} \times AB \times ID + \frac{1}{2} \times BC \times IE + \frac{1}{2} \times CA \times IF \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times r + \frac{1}{2} \times 16 \times r + \frac{1}{2} \times 14 \times r \\ &= (3 + 8 + 7)r = 18r\end{aligned}$$

と表せる。よって、(2)の結果とあわせて

$$18r = 24\sqrt{3} \quad \therefore r = \cancel{24} \sqrt{3} \times \frac{1}{\cancel{18}} = \boxed{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

- (4) AIの長さは $\triangle ADI$ でピタゴラスの
定理を使って計算できる。
円の外部の点から、円に向けて引
いた2本の接線の、接点までの距
離は等しいので、

$$AD = AF, \quad BE = BD, \quad CF = CE$$

が成り立つ。

そこで、 $AD = AF = x$ とおくと、

$$BE = BD = AB - AD = 6 - x$$

$$CE = CF = AC - AF = 14 - x$$

なので、BCの長さに注目して

$$6 - x + 14 - x = 16 \quad 20 - 2x = 16 \quad \therefore x = 2$$

である。

$\triangle ADI$ でピタゴラスの定理より、

$$AI^2 = x^2 + r^2 = 2^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 4 + \frac{48}{9} = \frac{84}{9}$$

$$\text{よって、} AI > 0 \text{ より、} AI = \frac{\sqrt{84}}{3} = \boxed{\frac{2\sqrt{21}}{3}}$$

