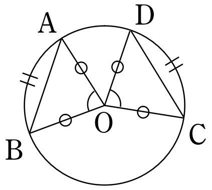
中2数学B 2019年度 夏期講習前期 本問解答
§1 中心角と円周角

※ 欠席してしまった場合は、問 1.1〜問 1.5 を（余裕があれば問 1.6 も）自分で確認し、p.11 の宿題 H1.1, H1.2 に取り組んで提出してください。

問1.1

(1) ［仮定］ $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ ……………………… ①

［結論］ $AB = CD$



［証明］

O を円の中心とする。

①より $\overset{\frown}{AB}$ と $\overset{\frown}{CD}$ の中心角は等しい…… ②
（弧長と中心角の比例公理）

△AOB と△COD において、

$AO = CO$ （円の半径） ………… ③

$BO = DO$ （円の半径） ………… ④

②より $\angle AOB = \angle COD$ ……………………… ⑤

③,④,⑤より、二辺夾角相等で、

$\triangle AOB \equiv \triangle COD$ ……………………… ⑥

⑥より $AB = CD$ （対応辺）

(q.e.d.)

(2) 弦 AB に対して、弧 AB は二つあり、一つに定まらない。弦 AB が直径と異なる場合、これら二つの弧は、長さも異なっているので、「長さの等しい弦に対して、弧の長さも等しい」という主張は正しくない。

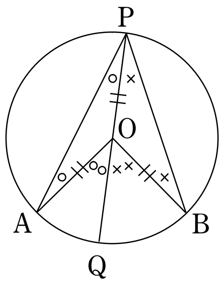
問1.2

☆の両辺を 2 倍した

$\angle AOB = 2\angle APB$

を証明することにする。

(1) O が∠APB の内部にある場合



直線 PO と円 O の交点のうち、P とは異なる方を Q とする。

△OPA において、

$PO = AO$ （円の半径） より、

$\angle OPA = \angle OAP$ （底角定理） ……… ①

$\therefore \angle AOQ = \angle OPA + \angle OAP$ （外角定理）

$= \angle OPA + \angle OPA$ （①より）

$= 2\angle OPA$ …………………………… ②

全く同様に、△OPB において、

$PO = BO$ （円の半径） より、

$\angle BOQ = 2\angle OPB$ …………………………… ③

よって、

$\angle AOB = \angle AOQ + \angle BOQ$

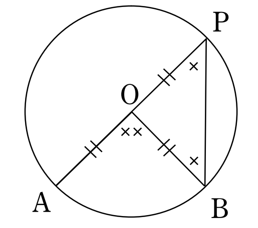
$= 2\angle OPA + 2\angle OPB$ （②,③より）

$= 2(\angle OPA + \angle OPB)$

$= 2\angle APB$

(q.e.d.)

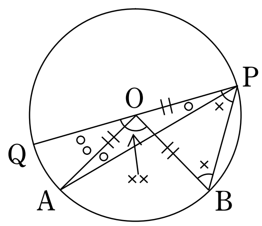
(2)　PA あるいは PB が直径の場合



どちらでも全く同様なので、PA が直径の場合を考える。
△OPB において、
PO＝BO　（円の半径）より、
　∠APB＝∠OBP　（底角定理）…………①
∴∠AOB＝∠APB＋∠OBP　（外角定理）
　　　　＝∠APB＋∠APB　（①より）
　　　　＝2∠APB

(q.e.d.)

(3)　O が∠APB の外部にある場合



弦 PA が半径 OB に交わる場合と、弦 PB が半径 OA に交わる場合があるが、やはり一方を考えれば、他方は全く同様なので、以下では弦 PA が半径 OB に交わる場合を考える。

直線 PO と円 O の交点のうち、P とは異なる方を Q とする。
(1)と全く同様に、
　∠AOQ＝2∠OPA ………………………………①
　∠BOQ＝2∠OPB ………………………………②
となるから、
∠AOB＝∠BOQ－∠AOQ
　　　＝2∠OPB－2∠OPA　（①,②より）
　　　＝2(∠OPB－∠OPA)
　　　＝2∠APB

(q.e.d.)

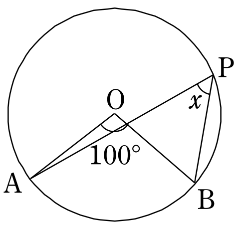
問1.3
半円に対する中心角は180°なので、円周角の定理より、円周角はその半分の 90°である。

(q.e.d.)

問1.4

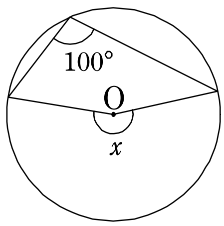
(1) 円周角の定理より、

$$x = 100° \times \frac{1}{2} = \boxed{50°}$$



(2) 円周角の定理より、

$$x = 2 \times 100° = \boxed{200°}$$

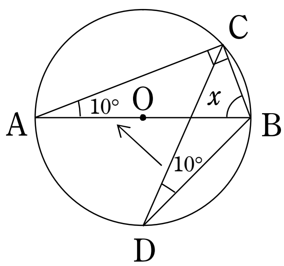


(3) 円周角の定理より、

$\angle \mathrm{CAB} = \angle \mathrm{CDB} = 10°$

また、AB は直径だから、

$\angle \mathrm{ACB} = 90°$



よって、△ABC の内角和を考えて、

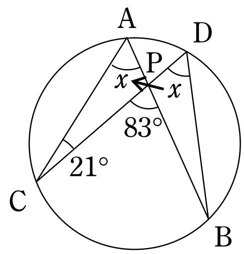
$$x = 180° - (10° + 90°) = \boxed{80°}$$

(4) 円周角の定理より、

$\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{BDC} = x$

△ACP の外角に注目して、

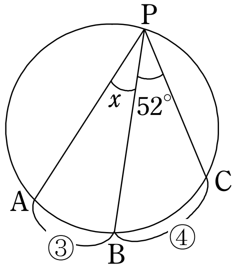
$x + 21° = 83° \quad \therefore x = 83° - 21° = \boxed{62°}$



問1.5

(1) 弧長と円周角は比例するから(円周角の定理)、

$$\angle APB : \angle BPC = \overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} = 3 : 4$$



よって、

$$x : 52° = 3 : 4 \qquad \therefore x = 52° \times \frac{3}{4} = \boxed{39°}$$

(2) $\overset{\frown}{BAD}$ は全円の

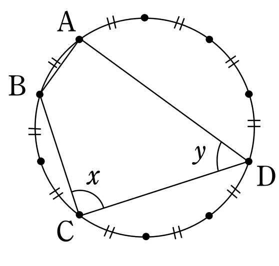
$$\frac{1+4}{1+2+3+4} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \text{倍}$$

である。よって、$\overset{\frown}{BAD}$ に対する中心角は、全円が定める中心角 $360°$ の $\frac{1}{2}$ 倍、つまり、$180°$ である。x は $\overset{\frown}{BAD}$ に対する円周角だから、さらにこの $\frac{1}{2}$ 倍で

$$x = \boxed{90°}$$

同様に、$\overset{\frown}{ABC}$ は全円の $\frac{3}{10}$ 倍だから、

$$y = 360° \times \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} = \boxed{54°}$$



※

別解

$\overset{\frown}{BAD}$ は全円の $\frac{1}{2}$ 倍つまり、半円であるから、x は直径の円周角で

$$x = \boxed{90°}$$

また、

$$\overset{\frown}{BAD} : \overset{\frown}{ABC} = \frac{5}{10} : \frac{3}{10} = 5 : 3$$

より、

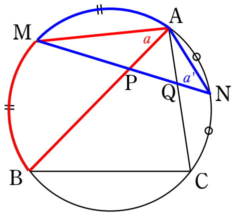
$$y = x \times \frac{3}{5} = 90° \times \frac{3}{5} = \boxed{54°}$$

問1.6

［仮定］ $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$ …①

$\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NC}$ …②

［結論］△APQ は二等辺三角形

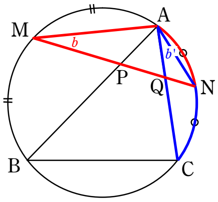


［証明］

①より、

∠ANM＝∠BAM …… ③

（円周角の定理）



②より、

∠AMN＝∠CAN …… ④

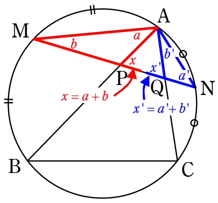
（円周角の定理）

また、△APM,△AQN に

外角定理を用いて、

∠APQ＝∠BAM＋∠AMN …… ⑤

∠AQP＝∠ANM＋∠CAN …… ⑥



③④⑤⑥より、

∠APQ＝∠AQP

よって、

AP＝AQ （底角定理）

(q.e.d.)