

中2数学B 2019年度 夏期講習前期 本問解答 §2 円周角の定理の応用

※ 欠席してしまった場合は、問 2.1～問 2.5 を(余裕があれば問 2.6 も) 自分で確認し、p.15 の宿題 H2.1, H2.2 に取り組んで提出してください。

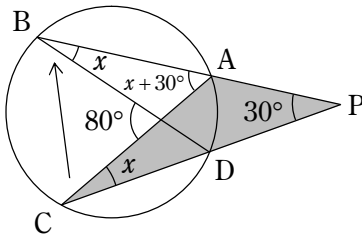
問2.1

△ACP において、

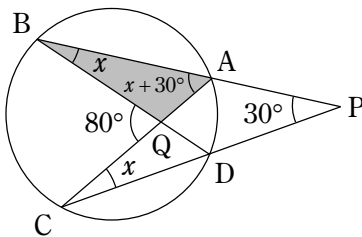
$$\begin{aligned}\angle BAC &= \angle ACD + \angle APC \quad (\text{外角定理}) \\ &= x + 30^\circ \quad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

円周角の定理より、

$$\angle ABD = \angle ACD = x \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$



AC と BD の交点を Q とおくと、



△ABQ において、

$$\begin{aligned}\angle BQC &= \angle BAC + \angle ABD \quad (\text{外角定理}) \\ &= x + 30^\circ + x \quad (\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より}) \\ &= 2x + 30^\circ\end{aligned}$$

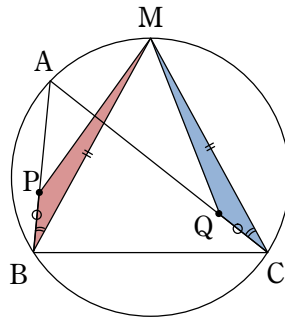
一方、 $\angle BQC = 80^\circ$ なので、

$$2x + 30^\circ = 80^\circ$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}(80^\circ - 30^\circ) = \boxed{25^\circ}$$

問2.2

[結論] $MP = MQ$



[証明]

△MBP と △MCQ において、

$\widehat{BM} = \widehat{CM}$ (仮定) より、

$$BM = CM \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また、

$$BP = CQ \quad (\text{仮定}) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

また $\widehat{AM}$ に対する円周角を考え、

$$\angle MBP = \angle MCQ \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より、

$$\triangle MBP \equiv \triangle MCQ \quad (\text{二辺夾角相等})$$

だから、対応辺を考え、

$$MP = MQ$$

(q.e.d.)

問2.3

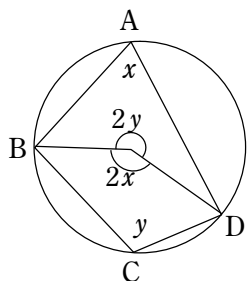
円周角の定理より、

$$(\text{弧BCDの中心角}) = 2x$$

$$(\text{弧BADの中心角}) = 2y$$

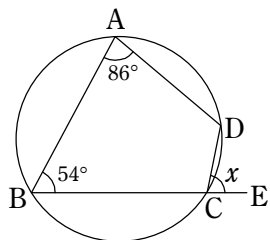
だから、

$$2x + 2y = 360^\circ \quad \therefore x + y = \boxed{180^\circ}$$



問2.4

(1)



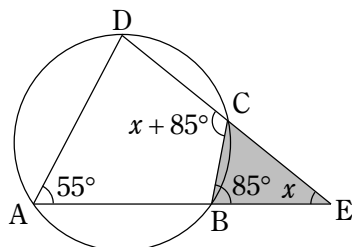
四角形 ABCD は円に内接しているから、

$$x = \angle DCE = \angle BAD$$

(内接四角形の定理)

$$= \boxed{86^\circ}$$

(2)



$\triangle BCE$ において、

$$\angle BCD = x + 85^\circ \quad (\text{外角定理})$$

四角形 ABCD において、

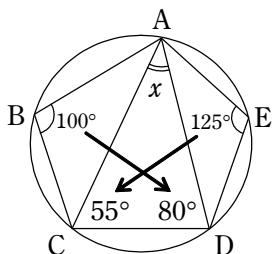
$$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$$

(内接四角形の定理)

$$55^\circ + x + 85^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore x = 180^\circ - (85^\circ + 55^\circ) = \boxed{40^\circ}$$

(3)



四角形 ABCD において、
 $\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC$
 (内接四角形の定理)
 $= 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

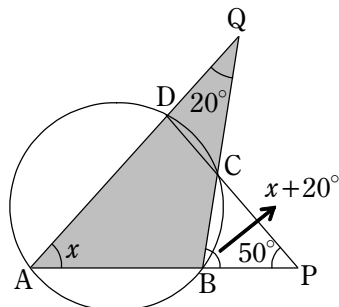
四角形 ACDE において、
 $\angle ACD = 180^\circ - \angle AED$
 (内接四角形の定理)
 $= 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$

よって、 $\triangle ACD$ の内角の和に注目して、

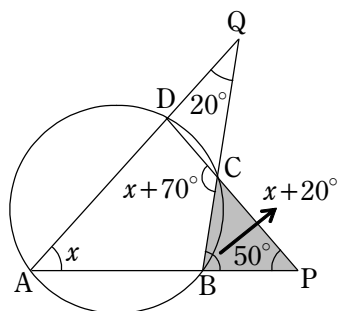
$$x = 180^\circ - (80^\circ + 55^\circ)$$

$$= 180^\circ - 135^\circ = \boxed{45^\circ}$$

(4) $\triangle ABQ$ において、
 $\angle CBP = \angle QAB + \angle AQB$ (外角定理)
 $= x + 20^\circ$



$\triangle BCP$ において、
 $\angle BCD = \angle CBP + \angle CPB$ (外角定理)
 $= (x + 20^\circ) + 50^\circ = x + 70^\circ$



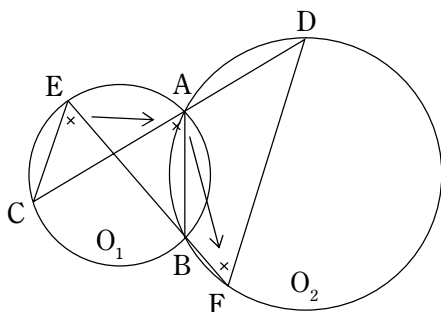
四角形 ABCD において、
 $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$
 (内接四角形の定理)

$$x + (x + 70^\circ) = 180^\circ$$

$$2x = 110^\circ \quad \therefore x = \boxed{55^\circ}$$

問2.5

[結論] $CE \parallel DF$



[証明]

共通弦 AB を引く。

円 O_1 の $\widehat{BC}$ に注目して、

$$\angle CEB = \angle CAB \dots\dots\dots ①$$

(円周角の定理)

円 O_2 に内接する四角形 $ABFD$ に注目して、

$$\angle CAB = \angle BFD \dots\dots\dots ②$$

(内接四角形の定理)

$$①, ② \text{ より } \angle CEB = \angle BFD \dots\dots\dots ③$$

$$③ \text{ より } CE \parallel DF \text{ (錯角定理)}$$

(q.e.d.)

問2.6

[仮定] $AB \parallel DE$ ①

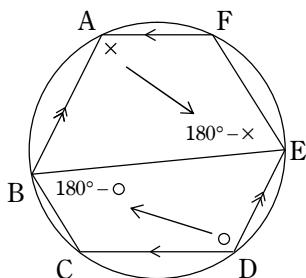
$AF \parallel CD$ ②

[結論] $BC \parallel EF$

※ まずは、 BE と BC , FE のなす錯角が等しいことを示すという方針で証明してみよう。

[証明]

弦 BE を引く。



四角形 $ABEF$ において、

$$\angle BEF = 180^\circ - \angle BAF \text{ ③}$$

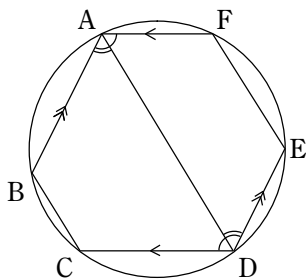
(内接四角形の定理)

四角形 $BCDE$ において、

$$\angle EBC = 180^\circ - \angle EDC \text{ ④}$$

(内接四角形の定理)

次に、弦 AD を引く。



①より

$$\angle BAD = \angle EDA \text{ (錯角定理) ⑤}$$

②より

$$\angle FAD = \angle CDA \text{ (錯角定理) ⑥}$$

⑤, ⑥より

$$\angle BAD + \angle FAD = \angle EDA + \angle CDA$$

$$\therefore \angle BAF = \angle EDC \text{ ⑦}$$

③, ④, ⑦より

$$\angle BEF = \angle EBC \text{ ⑧}$$

⑧より

$$BC \parallel EF \text{ (錯角定理)}$$

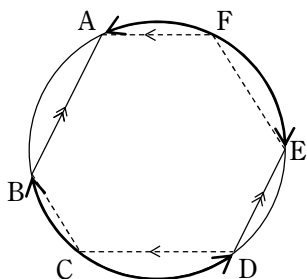
(q.e.d.)

※ H1.2 の性質を利用して証明することもできる。

[証明]

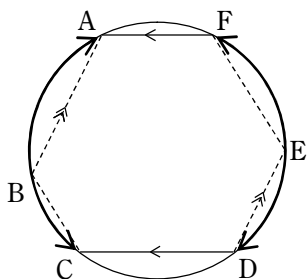
①より $\widehat{AFE} = \widehat{BCD}$ (H1.2 (2))

$$\therefore \widehat{AF} + \widehat{FE} = \widehat{BC} + \widehat{CD} \dots\dots\dots ③$$



②より $\widehat{ABC} = \widehat{FED}$ (H1.2 (2))

$$\therefore \widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{FE} + \widehat{ED} \dots\dots\dots ④$$

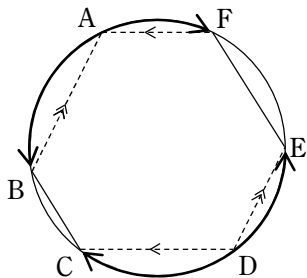


③+④より

$$\widehat{AF} + \widehat{FE} + \widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{FE} + \widehat{ED}$$

$$\widehat{AF} + \widehat{AB} = \widehat{CD} + \widehat{ED}$$

$$\therefore \widehat{BAF} = \widehat{CDE} \dots\dots\dots ⑤$$



⑤より $BC \parallel EF$ (H1.2 (1))

(q.e.d.)