中2数学B 2019年度 夏期講習前期 本問解答
§4 円と接線

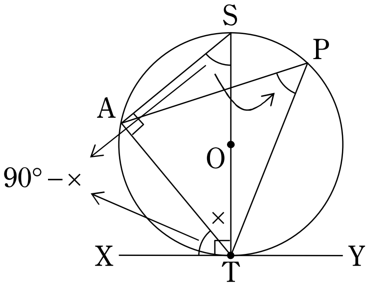
※ 欠席してしまった場合は、問 4.1〜問 4.3 を（余裕があれば問 4.4 も）自分で確認し、p.26, p.27 の宿題 H4.1〜H4.3 に（余裕があれば H4.4 も）取り組んで提出してください。

問4.1

$\angle$ATX が鋭角、直角、鈍角の場合に場合分けをして考える。

［仮定］
XY は T における円 O の接線…………①
［結論］
$\angle \mathrm{ATX} = \angle \mathrm{APT}$

(i) $\angle$ATX が鋭角のとき



直線 OT と円 O の交点のうち、T とは異なる方を S とする。
接線と、接点を通る半径は直交するので、①より

$\angle \mathrm{OTX} = 90°$

$\therefore \angle \mathrm{ATX} = \angle \mathrm{OTX} - \angle \mathrm{ATS}$
$= 90° - \angle \mathrm{ATS}$ ………………………②

ST は直径なので、
$\angle \mathrm{SAT} = 90°$ （直径の円周角） ………③

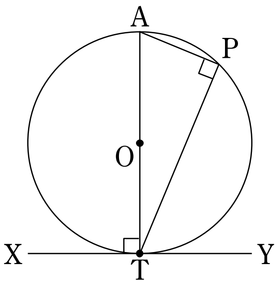
$\triangle$AST の内角の和に注目して、
$\angle \mathrm{AST} + \angle \mathrm{SAT} + \angle \mathrm{ATS} = 180°$

$\therefore \angle \mathrm{AST} = 180° - \angle \mathrm{SAT} - \angle \mathrm{ATS}$
$= 180° - 90° - \angle \mathrm{ATS}$ （③より）
$= 90° - \angle \mathrm{ATS}$ ………………………④

②,④より $\angle \mathrm{ATX} = \angle \mathrm{AST}$ …………………⑤

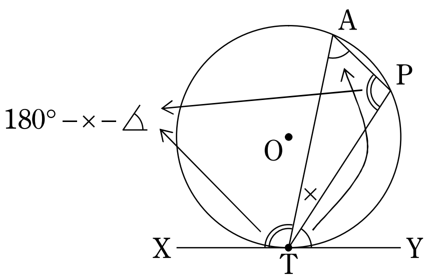
一方、
$\angle \mathrm{AST} = \angle \mathrm{APT}$ （円周角の定理）…⑥
⑤,⑥より、$\angle \mathrm{ATX} = \angle \mathrm{APT}$

(ii) $\angle$ATX が直角のとき



仮定より
$\angle \mathrm{ATX} = 90°$ ………………………………………⑦
接線と、接点において直交する弦は円の直径なので、①より AT は円 O の直径で、
$\angle \mathrm{APT} = 90°$ （直径の円周角） ………⑧
⑦,⑧より、$\angle \mathrm{ATX} = \angle \mathrm{APT}$

(iii) $\angle$ATX が鈍角のとき



このとき、$\angle$PTY は鋭角なので、(i)で示した鋭角の場合の結果を利用して、

①より　$\angle \mathrm{PTY} = \angle \mathrm{PAT}$ ……………………… ⑨

点 T において、

$\angle \mathrm{ATX} = 180° - \angle \mathrm{PTY} - \angle \mathrm{ATP}$ ……… ⑩

$\triangle \mathrm{APT}$ の内角の和に注目して、

$\angle \mathrm{APT} + \angle \mathrm{PAT} + \angle \mathrm{ATP} = 180°$

$\therefore \angle \mathrm{APT} = 180° - \angle \mathrm{PAT} - \angle \mathrm{ATP}$ ……… ⑪

⑨, ⑩, ⑪より、$\angle \mathrm{ATX} = \angle \mathrm{APT}$

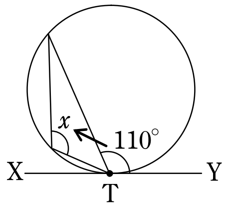
以上より、いずれの場合にも接弦定理が成り立つことが示された。

(q.e.d.)

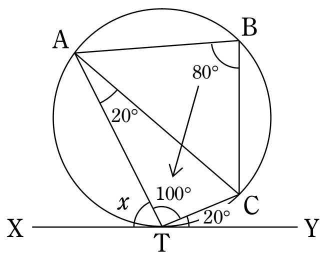
問4.2

(1)　接弦定理より、

$x = \boxed{110°}$



(2)



接弦定理より、

$\angle \mathrm{CTY} = \angle \mathrm{CAT} = 20°$

四角形 ATCB に、内接四角形の定理を用いて、

$\angle \mathrm{ATC} = 180° - \angle \mathrm{ABC}$

$= 180° - 80° = 100°$

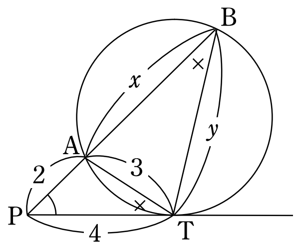
よって、$\angle \mathrm{XTY}$ に注目して

$x + 100° + 20° = 180°$

$\therefore x = 180° - 120° = \boxed{60°}$

問4.3

$\triangle \mathrm{APT}$ と $\triangle \mathrm{TPB}$ において、



$\angle \mathrm{ATP} = \angle \mathrm{TBP}$　（接弦定理）

$\angle \mathrm{APT} = \angle \mathrm{TPB}$　（共通）

$\therefore \triangle \mathrm{APT} \backsim \triangle \mathrm{TPB}$　（二角相等）

対応辺の比を考えて、

$\mathrm{AP} : \mathrm{PT} = \mathrm{TP} : \mathrm{PB}$

$2 : 4 = 4 : (2 + x)$

$x + 2 = 4 \times \dfrac{4}{2} = 8 \quad \therefore x = 8 - 2 = \boxed{6}$

また、

$\mathrm{AP} : \mathrm{AT} = \mathrm{TP} : \mathrm{TB}$

$2 : 3 = 4 : y \quad \therefore y = 4 \times \dfrac{3}{2} = \boxed{6}$

問4.4

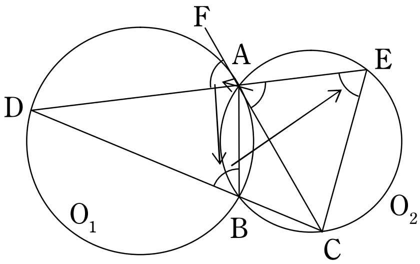
［仮定］

AC は A における円 O_1 の接線…………①

(1)　［結論］ $CA=CE$

［証明］

共通弦 AB を引く。また CA の A 側の延長上に点 F をとる。



まず、

$\angle CAE=\angle FAD$ （対頂角定理）‥②

円 O_1 において、①より

$\angle FAD=\angle ABD$ （接弦定理）……③

円 O_2 と四角形 ABCE において、

$\angle ABD=\angle CEA$ …………………………④

（内接四角形の定理）

②, ③, ④より

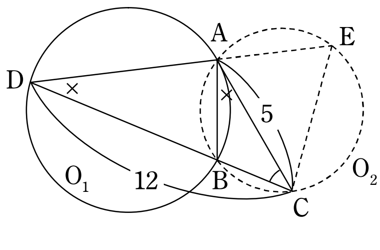
$\angle CAE=\angle CEA$

だから

$CA=CE$ （底角定理）………………⑤

(q.e.d.)

(2)　⑤より　$CA=CE=5$



△ABC と△DAC において、

①より、

$\angle BAC=\angle ADC$　（接弦定理）

$\angle ACB=\angle DCA$　（共通）

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle DAC$　（二角相等）

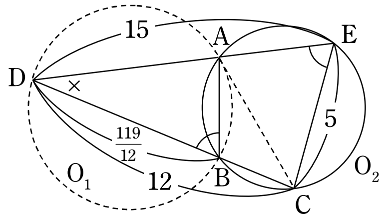
対応辺の比を考えて、

$CB:CA=CA:CD$

$CB:5=5:12$　$\therefore CB=5\times\dfrac{5}{12}=\dfrac{25}{12}$

よって、

$DB=CD-CB=12-\dfrac{25}{12}=\dfrac{119}{12}$



△ABD と△CED において、

$\angle ABD=\angle CED$

（内接四角形の定理）

$\angle ADB=\angle CDE$　（共通）

$\therefore \triangle ABD \backsim \triangle CED$　（二角相等）

対応辺の比を考えて、

$DB:AB=DE:CE$

$\dfrac{119}{12}:AB=15:5$

$\therefore AB=\dfrac{119}{12}\times\dfrac{5}{15}=\boxed{\dfrac{119}{36}}$