

中2数学C 2019年度 夏期講習前期 本問解答

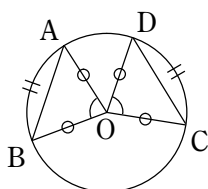
§1 中心角と円周角

※ 欠席してしまった場合は、問 1.1～問 1.4 を（余裕があれば問 1.5, 問 1.6 も）自分で確認し、p.11 の宿題 H1.1, H1.2 に取り組んで提出してください。

問1.1

(1) [仮定] $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ ①

[結論] $AB = CD$



[証明]

O を円の中心とする。

①より $\widehat{AB}$ と $\widehat{CD}$ の中心角は等しい…… ②
(弧長と中心角の比例公理)

$\triangle AOB$ と $\triangle COD$ において、

$AO = CO$ (円の半径) ③

$BO = DO$ (円の半径) ④

②より $\angle AOB = \angle COD$ ⑤

③, ④, ⑤より、二辺夾角相等で、

$\triangle AOB \cong \triangle COD$ ⑥

⑥より $AB = CD$ (対応辺)

(q.e.d.)

(2) 弦 AB に対して、弧 AB は二つあり、一つに定まらない。弦 AB が直径と異なる場合、これら二つの弧は、長さも異なっているので、「長さの等しい弦に対して、弧の長さも等しい」という主張は正しくない。

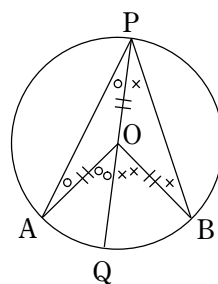
問1.2

☆の両辺を 2 倍した

$$\angle AOB = 2 \angle APB$$

を証明することにする。

(1) O が $\angle APB$ の内部にある場合



直線 PO と円 O の交点のうち、P とは異なる方を Q とする。

$\triangle OPA$ において、

$PO = AO$ (円の半径) より、

$$\angle OPA = \angle OAP \text{ (底角定理)} \dots\dots\dots ①$$

$$\therefore \angle AOQ = \angle OPA + \angle OAP \text{ (外角定理)}$$

$$= \angle OPA + \angle OPA \text{ (①より)}$$

$$= 2 \angle OPA \dots\dots\dots ②$$

全く同様に、 $\triangle OPB$ において、

$PO = BO$ (円の半径) より、

$$\angle BOQ = 2 \angle OPB \dots\dots\dots ③$$

よって、

$$\angle AOB = \angle AOQ + \angle BOQ$$

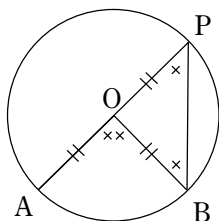
$$= 2 \angle OPA + 2 \angle OPB \text{ (②, ③より)}$$

$$= 2(\angle OPA + \angle OPB)$$

$$= 2 \angle APB$$

(q.e.d.)

(2) PA あるいは PB が直径の場合



$$\begin{aligned}\angle AOB &= \angle BOQ - \angle AOQ \\ &= 2\angle OPB - 2\angle OPA \quad (\text{①, ②より}) \\ &= 2(\angle OPB - \angle OPA) \\ &= 2\angle APB\end{aligned}$$

(q.e.d.)

どちらでも全く同様なので、PA が直径の場合を考える。

$\triangle OPB$ において、

$PO = BO$ (円の半径) より、

$$\angle APB = \angle OBP \quad (\text{底角定理}) \dots\dots\dots \text{①}$$

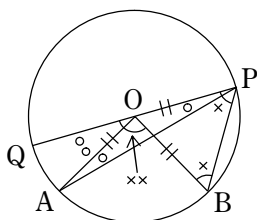
$$\therefore \angle AOB = \angle APB + \angle OBP \quad (\text{外角定理})$$

$$= \angle APB + \angle APB \quad (\text{①より})$$

$$= 2\angle APB$$

(q.e.d.)

(3) O が $\angle APB$ の外部にある場合



弦 PA が半径 OB に交わる場合と、弦 PB が半径 OA に交わる場合があるが、やはり一方を考えれば、他方は全く同様なので、以下では弦 PA が半径 OB に交わる場合を考える。

直線 PO と円 O の交点のうち、P とは異なる方を Q とする。

(1) と全く同様に、

$$\angle AOQ = 2\angle OPA \dots\dots\dots \text{①}$$

$$\angle BOQ = 2\angle OPB \dots\dots\dots \text{②}$$

となるから、

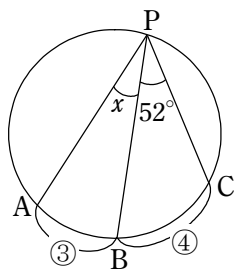
問1.3

- (1) 弧長と円周角の大きさは比例するので、

$$\angle APB : \angle BPC = \widehat{AB} : \widehat{BC}$$

$$x : 52^\circ = 3 : 4$$

$$\therefore x = 52^\circ \times \frac{3}{4} = \boxed{39^\circ}$$



$$\widehat{AB} : \widehat{BC} = 3 : 4$$

- (2) $\widehat{BAD}$ は全円の

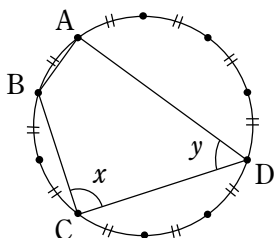
$$\frac{1+4}{1+2+3+4} = \frac{5}{10} \text{ 倍}$$

である。 x は $\widehat{BAD}$ に対する円周角だから、

$$x = 180^\circ \times \frac{5}{10} = \boxed{90^\circ}$$

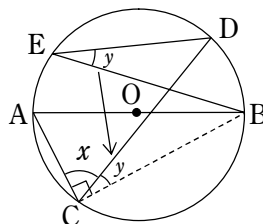
同様に $\widehat{ABC}$ は全円の $\frac{3}{10}$ 倍だから、

$$y = 180^\circ \times \frac{3}{10} = \boxed{54^\circ}$$



- (3) 円周角の定理より、
 $\angle BCD = \angle BED = y$
 AB は直径だから、

$$x + y = \angle ACB = \boxed{90^\circ}$$



- (4) AD と CE の交点を F とする。

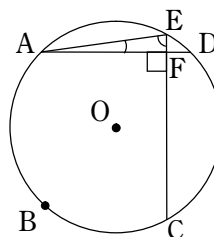
$\widehat{ABC}$ に対する円周角として $\angle AEF$ が、
 $\widehat{DE}$ に対する円周角として $\angle FAE$ が、
それぞれとれる。 $\triangle AEF$ の内角和に着目すると、

$$\angle AEF + \angle FAE = 180^\circ - \angle EFA$$

$$= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

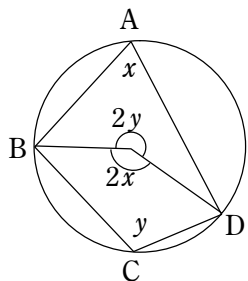
となり、 $\angle AEF + \angle FAE$ が、半円に対する円周角の大きさと等しいことが分かる。したがって、円周角の定理より、 $\widehat{ABC} + \widehat{DE}$ は半円の長さに等しく

全円の $\boxed{\frac{1}{2}}$ 倍である。



- (5) 円周角の定理より、
 (弧BCDの中心角) = $2x$
 (弧BADの中心角) = $2y$
 だから、

$$2x + 2y = 360^\circ \quad \therefore x + y = \boxed{180^\circ}$$



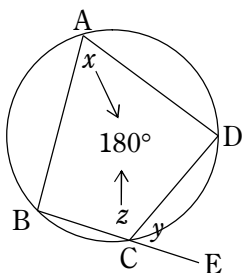
- (6) $\angle BCD = z$ とおくと、(5)より、
 $x + z = 180^\circ$ ①

一方、

$$y + z = 180^\circ \text{ (平角)} \quad \text{..... ②}$$

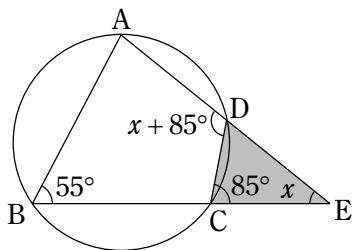
だから、①, ②より、

$$\boxed{y = x}$$



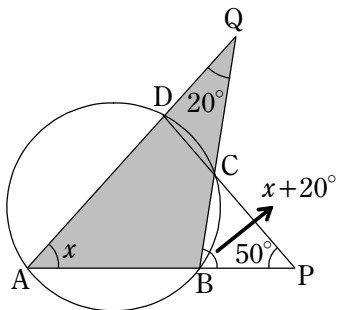
問1.4

(1)

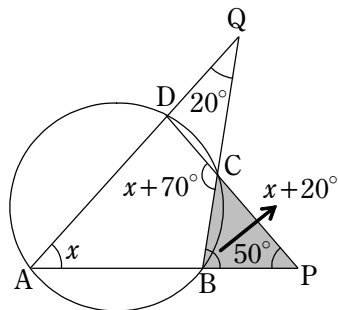


△CDE において、
 $\angle ADC = x + 85^\circ$ (外角定理)
 四角形 ABCD において、
 $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$
 (内接四角形の定理)
 $55^\circ + x + 85^\circ = 180^\circ$
 $\therefore x = 180^\circ - (85^\circ + 55^\circ) = \boxed{40^\circ}$

(2) △ABQ において、
 $\angle CBP = \angle QAB + \angle AQB$ (外角定理)
 $= x + 20^\circ$

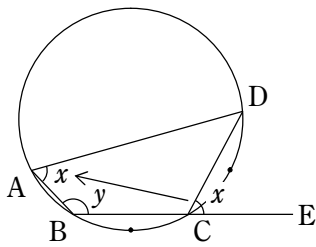


△BCP において、
 $\angle BCD = \angle CBP + \angle CPB$ (外角定理)
 $= (x + 20^\circ) + 50^\circ = x + 70^\circ$

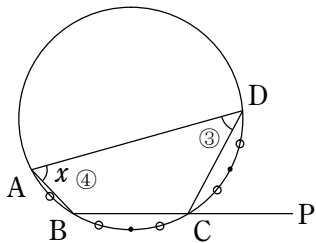


四角形 ABCD において、
 $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$
 (内接四角形の定理)
 $x + (x + 70^\circ) = 180^\circ$
 $2x = 110^\circ \quad \therefore x = \boxed{55^\circ}$

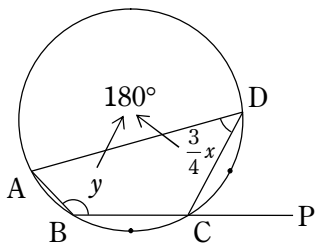
問1.5



四角形 ABCD において、
 $\angle BAD = \angle DCE = x$
 (内接四角形の定理)



円周角の定理より、
 $\angle BAD : \angle ADC = \widehat{BCD} : \widehat{ABC} = 4 : 3$
 $\therefore \angle ADC = \frac{3}{4} \times \angle BAD = \frac{3}{4}x$



再び四角形 ABCD において、
 $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$
 (内接四角形の定理)

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle ADC$$

$$\therefore \boxed{y = 180^\circ - \frac{3}{4}x}$$

問1.6

円の中心を O とすると、三辺相等で、

$$\triangle AOB \equiv \triangle COD \equiv \triangle EOF \equiv \triangle GOH$$

$$\triangle BOC \equiv \triangle DOE \equiv \triangle FOG \equiv \triangle HOA$$

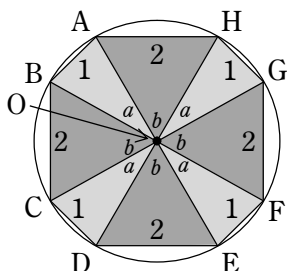
が成り立つ。

対応角である中心角を、それぞれ

$$\angle AOB = \angle COD = \angle EOF = \angle GOH = a$$

$$\angle BOC = \angle DOE = \angle FOG = \angle HOA = b$$

とくと、



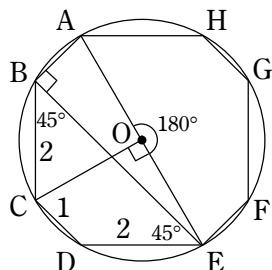
中心 O の周りの角の和を考えて、

$$4a + 4b = 360^\circ \quad \therefore a + b = 90^\circ$$

したがって、

$$\angle AOE = 2(a + b) = 180^\circ$$

で、 AE は直径と分かる。



よって、円の面積は

$$\pi \times AO^2 = \pi \times \left(\frac{AE}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} \times AE^2 \quad \dots\dots\dots ①$$

また、

$$\angle ABE = 90^\circ \text{ (直径の円周角)}$$

なので、 $\triangle ABE$ に、ピタゴラスの定理を用いて、

$$AE^2 = AB^2 + BE^2 \quad \dots\dots\dots ②$$

一方、円周角の定理より

$$\angle CBE = \frac{1}{2} \angle COE = \frac{1}{2} (a + b) = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$$

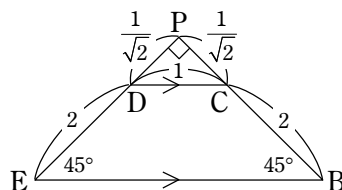
$$\angle DEB = \frac{1}{2} \angle DOB = \frac{1}{2} (a + b) = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$$

$$\therefore \angle CBE = \angle DEB (= 45^\circ) \quad \dots\dots\dots ③$$

であり、

$$CB = DE (= 2) \quad \dots\dots\dots ④$$

なので、③,④より、四角形 $BCDE$ は等脚台形である。



そこで、直線 BC, ED の交点を P とすると
③より、 $\triangle BPE, \triangle CPD$ は直角二等辺三角形
になっており、

$$PC = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad CD = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$BE = \sqrt{2} \quad PB = \sqrt{2} (PC + BC)$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \right) = 1 + 2\sqrt{2} \quad \dots\dots\dots ⑤$$

よって、求める面積①は

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} \times AE^2 &= \frac{\pi}{4} \times (AB^2 + BE^2) \quad (\because ②) \\ &= \frac{\pi}{4} \times \left\{ 1^2 + (1 + 2\sqrt{2})^2 \right\} \quad (\because ⑤) \\ &= \frac{\pi}{4} \times (1 + 1 + 4\sqrt{2} + 8) \\ &= \frac{(5 + 2\sqrt{2})\pi}{2} \end{aligned}$$

※ 中心角 a, b について、

$$a : b = 1 : 2, \quad \therefore a = 30^\circ, b = 60^\circ$$

とするのは典型的な誤りです。

弦の長さと中心角は比例しません！