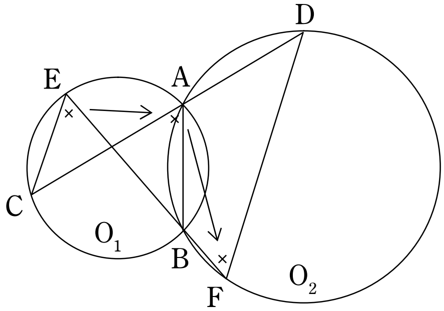
中2数学C　2019年度　夏期講習前期　本問解答
§2　円周角の定理を利用した証明

※　欠席してしまった場合は、問 2.1〜問 2.3 を（余裕があれば問 2.4 も）自分で確認し、p.15 の宿題 H2.1, H2.2 に取り組んで提出してください。

問2.1

［結論］ CE // DF



［証明］

共通弦 AB を引く。

円 O_1 の $\overset{\frown}{BC}$ に注目して、

$\angle CEB = \angle CAB$ ………………… ①

（円周角の定理）

円 O_2 に内接する四角形 ABFD に注目して、

$\angle CAB = \angle BFD$ ………………… ②

（内接四角形の定理）

①,②より　$\angle CEB = \angle BFD$ ………………… ③

③より　CE // DF　（錯角定理）

(q.e.d.)

問2.2

［仮定］ AB // DE ……………………………… ①

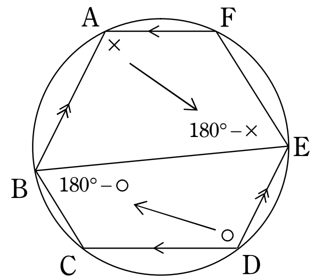
AF // CD ……………………………… ②

［結論］ BC // EF

※　まずは、BE と BC, FE のなす錯角が等しいことを示すという方針で証明してみよう。

［証明］

弦 BE を引く。



四角形 ABEF において、

$\angle BEF = 180° - \angle BAF$ ………………… ③

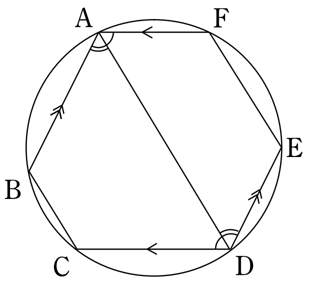
（内接四角形の定理）

四角形 BCDE において、

$\angle EBC = 180° - \angle EDC$ ………………… ④

（内接四角形の定理）

次に、弦 AD を引く。



①より

$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{EDA}$ （錯角定理） ⋯⋯⑤

②より

$\angle \mathrm{FAD} = \angle \mathrm{CDA}$ （錯角定理） ⋯⋯⑥

⑤,⑥より

$\angle \mathrm{BAD} + \angle \mathrm{FAD} = \angle \mathrm{EDA} + \angle \mathrm{CDA}$

$\therefore$ $\angle \mathrm{BAF} = \angle \mathrm{EDC}$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⑦

③,④,⑦より

$\angle \mathrm{BEF} = \angle \mathrm{EBC}$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⑧

⑧より

$\mathrm{BC} // \mathrm{EF}$ （錯角定理）

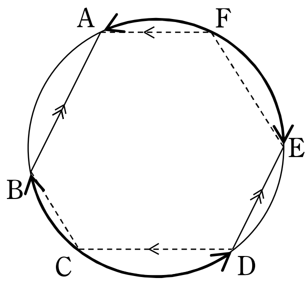
(q.e.d.)

※　H1.2 の性質を利用して証明することもできる。

［証明］

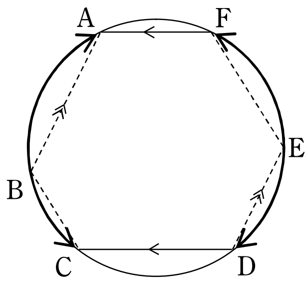
①より　$\overset{\frown}{\mathrm{AFE}} = \overset{\frown}{\mathrm{BCD}}$ （H1.2 (2)）

$\therefore$ $\overset{\frown}{\mathrm{AF}} + \overset{\frown}{\mathrm{FE}} = \overset{\frown}{\mathrm{BC}} + \overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯③



②より　$\overset{\frown}{\mathrm{ABC}} = \overset{\frown}{\mathrm{FED}}$ （H1.2 (2)）

$\therefore$ $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} + \overset{\frown}{\mathrm{BC}} = \overset{\frown}{\mathrm{FE}} + \overset{\frown}{\mathrm{ED}}$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯④

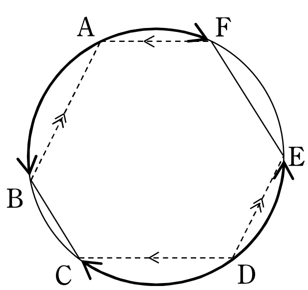


③＋④ より

$$\overset{\frown}{\mathrm{AF}} + \overset{\frown}{\mathrm{FE}} + \overset{\frown}{\mathrm{AB}} + \overset{\frown}{\mathrm{BC}} = \overset{\frown}{\mathrm{BC}} + \overset{\frown}{\mathrm{CD}} + \overset{\frown}{\mathrm{FE}} + \overset{\frown}{\mathrm{ED}}$$

$$\overset{\frown}{\mathrm{AF}} + \overset{\frown}{\mathrm{AB}} = \overset{\frown}{\mathrm{CD}} + \overset{\frown}{\mathrm{ED}}$$

$\therefore$ $\overset{\frown}{\mathrm{BAF}} = \overset{\frown}{\mathrm{CDE}}$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⑤



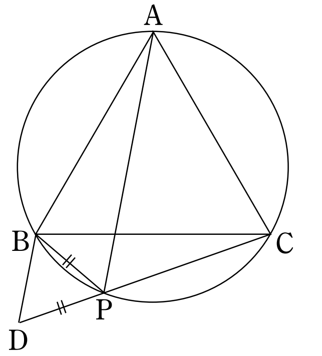
⑤より　$\mathrm{BC} // \mathrm{EF}$ （H1.2 (1)）

(q.e.d.)

問2.3

［仮定］△ABC は正三角形 ………………… ①

［結論］ PA＝PB＋PC

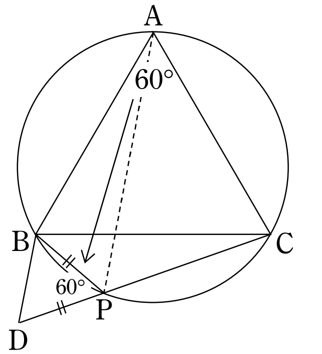


［証明］

CP の P 側の延長上に

PB＝PD ……………………………………… ②

となる点 D を取る。



四角形 ABPC において、

∠BPD＝∠BAC ……………………… ③

（内接四角形の定理）

なので、①,③より

∠BPD＝60° ………………………………… ④

②,④より

△PBD は正三角形…………………… ⑤

すると、△ABP と△CBD において、

①より AB＝CB……………………………… ⑥

⑤より BP＝BD ……………………………… ⑦

また、

∠ABP＝∠ABC＋∠CBP

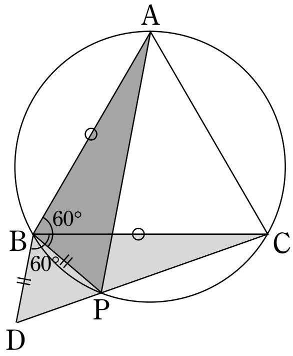
＝60°＋∠CBP （①より） …⑧

∠CBD＝∠CBP＋∠PBD

＝∠CBP＋60° （⑤より） …⑨

よって、⑧,⑨より

∠ABP＝∠CBD ………………………………… ⑩



⑥,⑦,⑩より

△ABP ≡ △CBD …………………………………… ⑪

（二辺夾角相等）

ゆえに PA＝DC （⑪より、対応辺）

＝PD＋PC

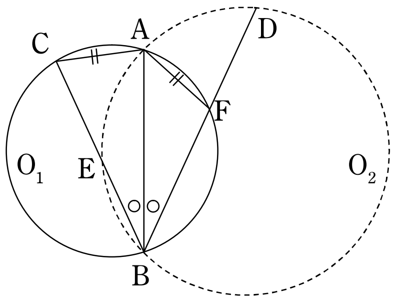
＝PB＋PC （⑤より）

(q.e.d.)

問2.4

［仮定］$\angle \mathrm{ABC}=\angle \mathrm{ABD}$ …………………… ①

［結論］$\mathrm{CE}=\mathrm{FD}$



［証明］

円 O_1 に注目すると、

①より　$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}=\overset{\frown}{\mathrm{AF}}$　　（円周角の定理）

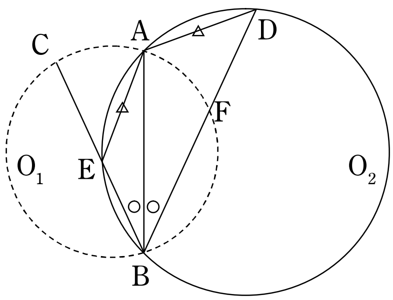
∴　$\mathrm{AC}=\mathrm{AF}$ ………………………………… ②

（弧長と弦の対応定理）

四角形 ACBF において、

$\angle \mathrm{CAF}=180^\circ-\angle \mathrm{CBD}$ …………… ③

（内接四角形の定理）



円 O_2 に注目すると、

①より　$\overset{\frown}{\mathrm{AE}}=\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$　　（円周角の定理）

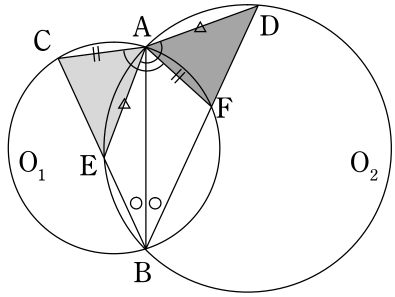
∴　$\mathrm{AE}=\mathrm{AD}$ ………………………………… ④

（弧長と弦の対応定理）

四角形 AEBD において、

$\angle \mathrm{EAD}=180^\circ-\angle \mathrm{CBD}$ …………… ⑤

（内接四角形の定理）



△CAE と△FAD において、

③,⑤より

$\angle \mathrm{CAF}=\angle \mathrm{EAD}$

$\angle \mathrm{CAF}-\angle \mathrm{EAF}=\angle \mathrm{EAD}-\angle \mathrm{EAF}$

∴　$\angle \mathrm{CAE}=\angle \mathrm{FAD}$ …………………… ⑥

②,④,⑥より

$\triangle \mathrm{CAE}\equiv\triangle \mathrm{FAD}$ …………………… ⑦

（二辺夾角相等）

⑦より　$\mathrm{CE}=\mathrm{FD}$ （対応辺）

(q.e.d.)