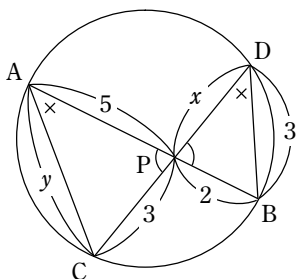


中2数学C 2019年度 夏期講習前期 本問解答 §3 円と三角形の相似

※ 欠席してしまった場合は、問3.1～問3.4を(余裕があれば問3.5も)自分で確認し、p.20, p.21の宿題H3.1～H3.3に取り組んで提出してください。

問3.1

(1) $\triangle APC$ と $\triangle DPB$ において、



$\angle CAP = \angle BDP$ (円周角の定理)
 $\angle CPA = \angle BPD$ (対頂角)
 $\therefore \triangle APC \sim \triangle DPB$ (二角相等)
 対応辺の比を考え、
 $AP : PC = DP : PB$

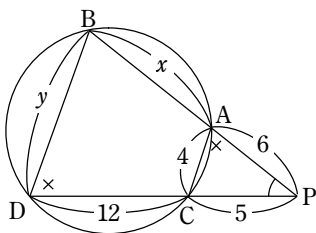
$$5 : 3 = x : 2 \quad \therefore x = 2 \times \frac{5}{3} = \boxed{\frac{10}{3}}$$

また、

$$AC : CP = DB : BP$$

$$y : 3 = 3 : 2 \quad \therefore y = 3 \times \frac{3}{2} = \boxed{\frac{9}{2}}$$

(2) $\triangle APC$ と $\triangle DPB$ において、



$$\angle PAC = \angle PDB$$

(内接四角形の定理)

$$\angle APC = \angle DPB \quad (\text{共通})$$

$$\therefore \triangle APC \sim \triangle DPB \quad (\text{二角相等})$$

対応辺の比を考え、

$$AP : PC = DP : PB$$

$$6 : 5 = 17 : (x + 6)$$

$$x + 6 = 17 \times \frac{5}{6} = \frac{85}{6}$$

$$\therefore x = \frac{85}{6} - 6 = \boxed{\frac{49}{6}}$$

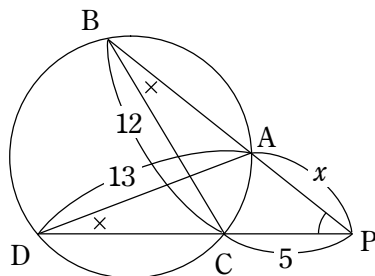
また、

$$AP : AC = DP : DB$$

$$6 : 4 = 17 : y \quad \therefore y = 17 \times \frac{4}{6} = \boxed{\frac{34}{3}}$$

問3.2

$\triangle BPC$ と $\triangle DPA$ において、



$$\angle PBC = \angle PDA \quad (\text{円周角の定理})$$

$$\angle BPC = \angle DPA \quad (\text{共通})$$

$$\therefore \triangle BPC \sim \triangle DPA \quad (\text{二角相等})$$

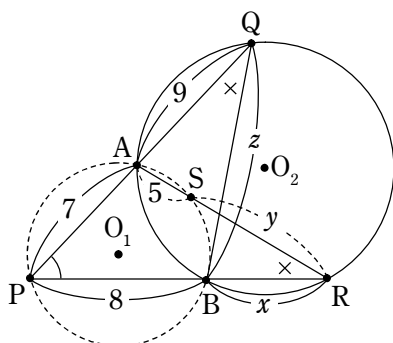
対応辺の比を考え、

$$PC : CB = PA : AD$$

$$5 : 12 = x : 13 \quad \therefore x = 13 \times \frac{5}{12} = \boxed{\frac{65}{12}}$$

問3.3

(1) $\triangle APR$ と $\triangle BPQ$ において、



$\angle ARP = \angle BQP$ (円周角の定理)

$\angle APR = \angle BPQ$ (共通)

$\therefore \triangle APR \sim \triangle BPQ$ (二角相等)

であるから、対応辺の比を考えて、

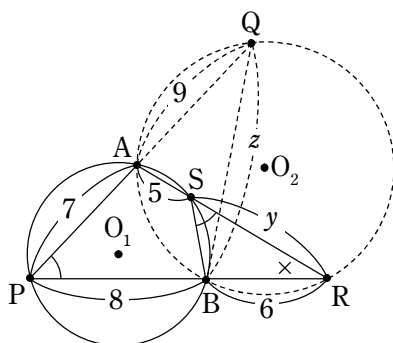
$$AP : PR = BP : PQ$$

$$7 : (8 + x) = 8 : 16$$

$$8 + x = 7 \times \frac{16}{8} = 14$$

$$\therefore x = 14 - 8 = \boxed{6}$$

(2) $\triangle BRS$ と $\triangle ARP$ において、



$\angle BSR = \angle APR$

(内接四角形の定理)

$\angle BRS = \angle ARP$ (共通)

$\therefore \triangle BRS \sim \triangle ARP$ (二角相等)

であるから、対応辺の比を考えて、

$$BR : RS = AR : RP$$

$$6 : y = (5 + y) : 14$$

$$\frac{6}{y} = \frac{5 + y}{14}$$

$$y(5 + y) = 6 \times 14$$

この方程式を解くと、

$$y^2 + 5y - 84 = 0$$

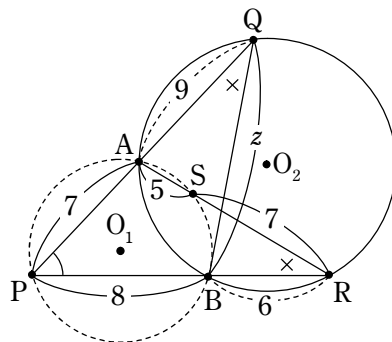
$$(y + 12)(y - 7) = 0$$

$$y = -12, 7$$

$y > 0$ だから、

$$y = \boxed{7}$$

(3) (1)で示した $\triangle APR \sim \triangle BPQ$ の対応辺の比を考えて、



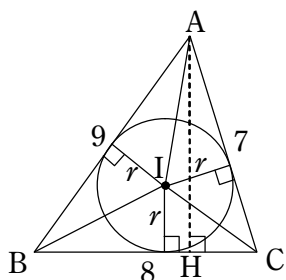
$$AP : AR = BP : BQ$$

$$7 : 12 = 8 : z$$

$$\therefore z = 8 \times \frac{12}{7} = \boxed{\frac{96}{7}}$$

問3.4

(1)



まず、ABC の面積を求めよう。

A から BC へ下ろした垂線の足を H とする。

AH = x , BH = y とおくと、

$$CH = BC - BH = 8 - y$$

△ABH にピタゴラスの定理を用いて、

$$9^2 = x^2 + y^2 \dots\dots\dots ①$$

△ACH にピタゴラスの定理を用いて、

$$7^2 = x^2 + (8 - y)^2$$

$$7^2 = x^2 + 64 - 16y + y^2 \dots\dots\dots ②$$

① - ② より、

$$81 - 49 = (x^2 + y^2) - (x^2 + 64 - 16y + y^2)$$

$$32 = -64 + 16y$$

$$\therefore y = (32 + 64) \times \frac{1}{16} = 6$$

したがって、①より

$$x^2 = 9^2 - 6^2 = (9 + 6)(9 - 6)$$

$$= 15 \times 3 = 3^2 \times 5$$

$x = AH > 0$ だから、

$$\therefore AH = 3\sqrt{5}$$

よって、三角形 ABC の面積は、

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AH$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$

一方、内心を I として、

$$\triangle ABC = \triangle IBC + \triangle ICA + \triangle IAB$$

$$= \frac{1}{2} \times (BC + CA + AB) \times r$$

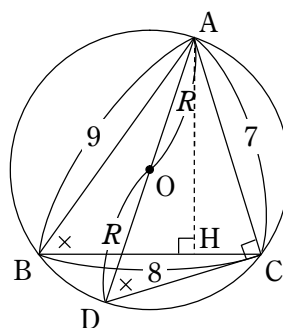
$$= \frac{1}{2} \times (8 + 7 + 9) \times r = 12r$$

とも表されるから、

$$12\sqrt{5} = 12r$$

$$\therefore r = \boxed{\sqrt{5}}$$

(2)



外心を O, 直線 AO と円 O の交点のうち、A とは異なる方を D とする。

△ABH と △ADC において、

$$\angle ABH = \angle ADC \quad (\text{円周角の定理})$$

$$\angle AHB = \angle ACD \quad (= 90^\circ)$$

$\therefore \triangle ABH \sim \triangle ADC$ (二角相等)

であるから、対応辺の比を考えて、

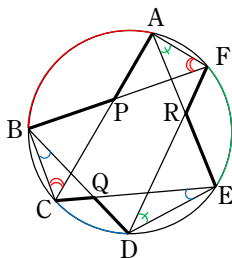
$$AB : AH = AD : AC$$

$$9 : 3\sqrt{5} = 2R : 7$$

$$2R = 7 \times \frac{9}{3\sqrt{5}} = \frac{21 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{21\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore R = \boxed{\frac{21\sqrt{5}}{10}}$$

問3.5



$\triangle APF$ と $\triangle BPC$ において

$$\angle APF = \angle BPC \quad (\text{対頂角})$$

$$\angle AFP = \angle BCP \quad (\widehat{AB} \text{ に対する円周角})$$

$\therefore \triangle APF \sim \triangle BPC$ (二角相等)

であるから、対応辺の比を考えて、

$$PA : PB = AF : BC$$

$$\therefore \frac{PB}{PA} = \frac{BC}{AF} \dots\dots\dots ①$$

$\triangle CQB$ と $\triangle DQE$ において

$$\angle CQB = \angle DQE \quad (\text{対頂角})$$

$$\angle CBQ = \angle DEQ \quad (\widehat{CD} \text{ に対する円周角})$$

$\therefore \triangle CQB \sim \triangle DQE$ (二角相等)

であるから、対応辺の比を考えて、

$$QC : QD = CB : DE$$

$$\therefore \frac{QD}{QC} = \frac{DE}{CB} \dots\dots\dots ②$$

$\triangle ERD$ と $\triangle FRA$ において

$$\angle ERD = \angle FRA \quad (\text{対頂角})$$

$$\angle EDR = \angle FAR \quad (\widehat{EF} \text{ に対する円周角})$$

$\therefore \triangle ERD \sim \triangle FRA$ (二角相等)

であるから、対応辺の比を考えて、

$$RE : RF = ED : FA$$

$$\therefore \frac{RF}{RE} = \frac{FA}{ED} \dots\dots\dots ③$$

①, ②, ③より、

$$\frac{PB}{PA} \times \frac{QD}{QC} \times \frac{RF}{RE} = \frac{BC}{AF} \times \frac{DE}{CB} \times \frac{FA}{ED} = 1$$

(q.e.d.)