中2数学C　2019年度　夏期講習前期　本問解答
§4　円と接線

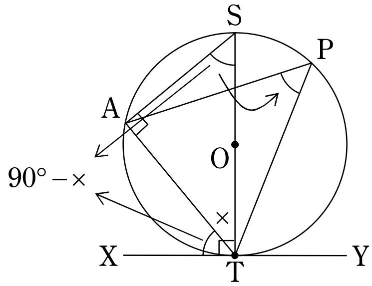
※　欠席してしまった場合は、問 4.1～問 4.3 を（余裕があれば問 4.4, 問 4.5 も）自分で確認し、p.28, 29 の宿題 H4.1～H4.3 に（余裕があれば H4.4 も）取り組んで提出してください。

問4.1

∠ATX が鋭角、直角、鈍角の場合に場合分けをして考える。

［仮定］
XY は T における円 O の接線…………①
［結論］
∠ATX = ∠APT

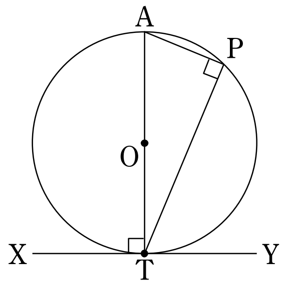
(i)　∠ATX が鋭角のとき



直線 OT と円 O の交点のうち、T とは異なる方を S とする。
接線と、接点を通る半径は直交するので、①より
$\angle OTX = 90°$
$\therefore \angle ATX = \angle OTX - \angle ATS$
$= 90° - \angle ATS$ ……………………… ②
ST は直径なので、
$\angle SAT = 90°$（直径の円周角）……… ③
△AST の内角の和に注目して、
$\angle AST + \angle SAT + \angle ATS = 180°$
$\therefore \angle AST = 180° - \angle SAT - \angle ATS$
$= 180° - 90° - \angle ATS$（③より）
$= 90° - \angle ATS$ ……………………… ④
②,④より　$\angle ATX = \angle AST$ ………………… ⑤

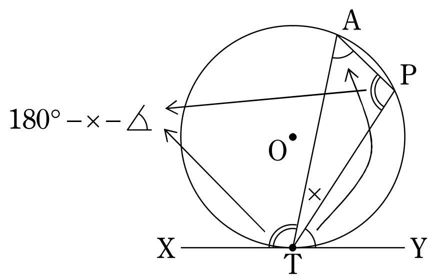
一方、
$\angle AST = \angle APT$（円周角の定理）…⑥
⑤,⑥より、$\angle ATX = \angle APT$

(ii)　∠ATX が直角のとき



仮定より
$\angle ATX = 90°$ ……………………………………⑦
接線と、接点において直交する弦は円の直径なので、①より AT は円 O の直径で、
$\angle APT = 90°$（直径の円周角）………⑧
⑦,⑧より、$\angle ATX = \angle APT$

(iii)　∠ATX が鈍角のとき



このとき、∠PTY は鋭角なので、(i)で示した鋭角の場合の結果を利用して、

①より　$\angle \mathrm{PTY} = \angle \mathrm{PAT}$ ……………………… ⑨

点 T において、

$\angle \mathrm{ATX} = 180^\circ - \angle \mathrm{PTY} - \angle \mathrm{ATP}$ ……… ⑩

$\triangle \mathrm{APT}$ の内角の和に注目して、

$\angle \mathrm{APT} + \angle \mathrm{PAT} + \angle \mathrm{ATP} = 180^\circ$

$\therefore \angle \mathrm{APT} = 180^\circ - \angle \mathrm{PAT} - \angle \mathrm{ATP}$ ……… ⑪

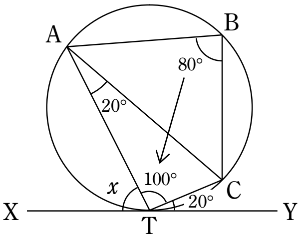
⑨, ⑩, ⑪より、$\angle \mathrm{ATX} = \angle \mathrm{APT}$

以上より、いずれの場合にも接弦定理が成り立つことが示された。

(q.e.d.)

問4.2

(1)



接弦定理より、

$\angle \mathrm{CTY} = \angle \mathrm{CAT} = 20^\circ$

四角形 ATCB に、内接四角形の定理を用いて、

$\angle \mathrm{ATC} = 180^\circ - \angle \mathrm{ABC}$

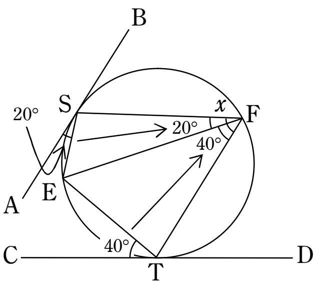
$= 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$

よって、$\angle \mathrm{XTY}$ に注目して

$x + 100^\circ + 20^\circ = 180^\circ$

$\therefore x = 180^\circ - 120^\circ = \boxed{60^\circ}$

(2)



接弦定理より、

$\angle \mathrm{SFE} = \angle \mathrm{ESA} = 20^\circ$

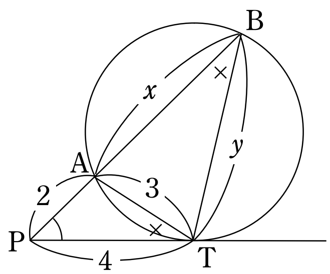
$\angle \mathrm{TFE} = \angle \mathrm{ETC} = 40^\circ$

よって、

$x = 20^\circ + 40^\circ = \boxed{60^\circ}$

問4.3

$\triangle \mathrm{APT}$ と $\triangle \mathrm{TPB}$ において、



$\angle \mathrm{ATP} = \angle \mathrm{TBP}$　（接弦定理）

$\angle \mathrm{APT} = \angle \mathrm{TPB}$　（共通）

$\therefore \triangle \mathrm{APT} \backsim \triangle \mathrm{TPB}$　（二角相等）

対応辺の比を考えて、

$\mathrm{AP} : \mathrm{PT} = \mathrm{TP} : \mathrm{PB}$

$2 : 4 = 4 : (2 + x)$

$x + 2 = 4 \times \dfrac{4}{2} = 8 \quad \therefore x = 8 - 2 = \boxed{6}$

また、

$\mathrm{AP} : \mathrm{AT} = \mathrm{TP} : \mathrm{TB}$

$2 : 3 = 4 : y \quad \therefore y = 4 \times \dfrac{3}{2} = \boxed{6}$

問4.4

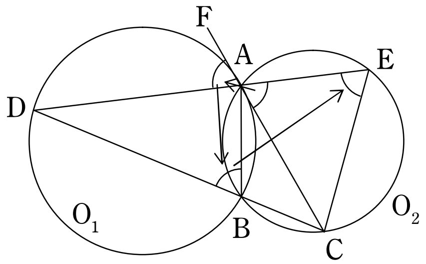
［仮定］

AC は A における円 O_1 の接線 ……… ①

(1)　［結論］ $CA = CE$

［証明］

共通弦 AB を引く。また CA の A 側の延長上に点 F をとる。



まず、

$\angle CAE = \angle FAD$（対頂角定理）‥②

円 O_1 において、①より

$\angle FAD = \angle ABD$（接弦定理）……③

円 O_2 と四角形 ABCE において、

$\angle ABD = \angle CEA$ …………………………④

（内接四角形の定理）

②, ③, ④より

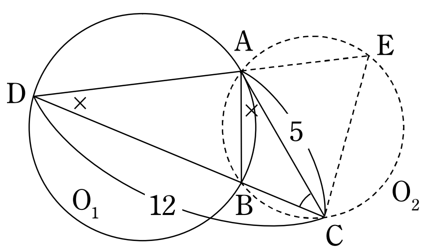
$\angle CAE = \angle CEA$

だから

$CA = CE$（底角定理）………………⑤

(q.e.d.)

(2)　⑤より　$CA = CE = 5$



△ABC と△DAC において、

①より、

$\angle BAC = \angle ADC$　（接弦定理）

$\angle ACB = \angle DCA$　（共通）

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle DAC$　（二角相等）

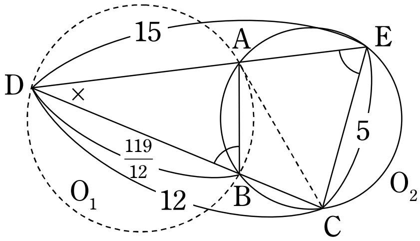
対応辺の比を考えて、

$CB : CA = CA : CD$

$CB : 5 = 5 : 12 \quad \therefore CB = 5 \times \frac{5}{12} = \frac{25}{12}$

よって、

$DB = CD - CB = 12 - \frac{25}{12} = \frac{119}{12}$



△ABD と△CED において、

$\angle ABD = \angle CED$

（内接四角形の定理）

$\angle ADB = \angle CDE$　（共通）

$\therefore \triangle ABD \backsim \triangle CED$　（二角相等）

対応辺の比を考えて、

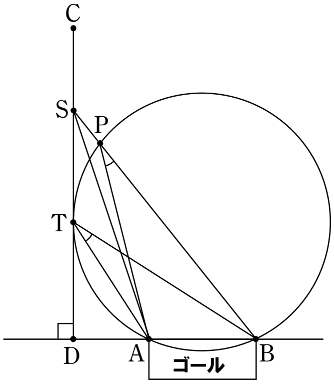
$DB : AB = DE : CE$

$\frac{119}{12} : AB = 15 : 5$

$\therefore AB = \frac{119}{12} \times \frac{5}{15} = \boxed{\frac{119}{36}}$

問4.5

もちろん、メッシ君の位置 X は半直線 DC 上にあるとして考える。
A, B を通り、DC に接する円 O を描き、DC と円 O の接点を T とする。このとき、T が「シュートが一番決まりやすい」場所になっていることを示そう。



CD 上の点 S が T とは異なる点であるとき、線分 BS は円 O と、B とは異なる交点 P をもつ。このとき、

$$\angle ASB = \angle APB - \angle SAP$$

（△ASP で外角定理）

$$< \angle APB$$

$$= \angle ATB$$ （円周角の定理）

なので、S よりも T の方が「シュートが決まりやすい」場所になっている。
S は半直線 DC 上、T 以外の任意の点なので、このことは、DC 上で「シュートが一番決まりやすい」場所は T であることを意味する。

メッシ君の位置 X が T であるときの、DX の長さを求めよう。
△ATD と△TBD において、

$\angle ATD = \angle TBD$ （接弦定理）

$\angle ADT = \angle TDB$ （共通）

$\therefore \triangle ATD \backsim \triangle TBD$ （二角相等）

対応辺の比を考えて、

$$DA : DT = DT : DB$$

$$4.9 : DT = DT : 12.1$$

$$\frac{4.9}{DT} = \frac{DT}{12.1}$$

$$DT^2 = 12.1 \times 4.9 = \frac{121}{10} \times \frac{49}{10} = \frac{11^2 \times 7^2}{10^2}$$

$$\therefore DT = \frac{11 \times 7}{10} = 7.7\ (>0)$$

よって、 $DX = DT = \boxed{7.7}$ m