

中2数学C 2019年度 夏期講習前期 本問解答 §5 接する二円

※ 欠席してしまった場合は、問 5.1, 問 5.2 を（余裕があれば問 5.3 も）自分で確認してください。

問5.1

[仮定]

O_1 と O_2 は T で外接する……………①

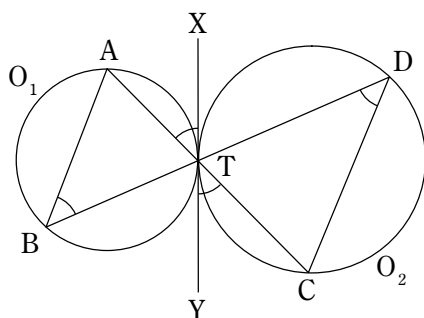
[結論]

$AB \parallel CD$

[証明]

①より、 T において O_1 , O_2 の両方に接する共通接線が引けるので、これを図のように XY とする。

XY は T における O_1 , O_2 の接線……………②



円 O_1 において、②より

$\angle ABT = \angle ATX$ (接弦定理) ……………③

$\angle ATX = \angle CTY$ (対頂角) ……………④

円 O_2 において、②より

$\angle CTY = \angle CDT$ (接弦定理) ……………⑤

③,④,⑤より

$\angle ABT = \angle CDT$ ……………⑥

⑥より、

$AB \parallel CD$ (錯角定理)

(q.e.d.)

問5.2

(1)

[仮定]

O_1 と O_2 は T で内接する……………①

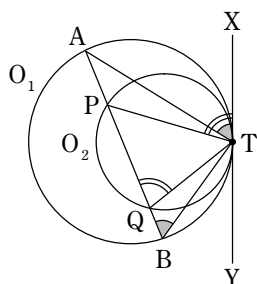
[結論]

$$\angle ATP = \angle BTQ$$

[証明]

①より、 T において O_1, O_2 の両方に接する共通接線が引けるので、これを図のように XY とする。

XY は T における O_1, O_2 の接線……………②



円 O_1 において、②より

$$\angle ATX = \angle ABT \quad (\text{接弦定理}) \quad \dots\dots\dots ③$$

円 O_2 において、②より

$$\angle PTX = \angle PQT \quad (\text{接弦定理}) \quad \dots\dots\dots ④$$

④ - ③ より

$$\angle PTX - \angle ATX = \angle PQT - \angle ABT$$

$$\therefore \angle ATP = \angle PQT - \angle ABT \quad \dots\dots\dots ⑤$$

一方、 $\triangle BQT$ において、

$$\angle BTQ = \angle PQT - \angle ABT \quad \dots\dots\dots ⑥$$

(外角定理)

⑤, ⑥ より

$$\angle ATP = \angle BTQ$$

(q.e.d.)

(2)

[仮定]

O_1 と O_2 は T で内接する……………①

AB は O_2 に S で接する……………②

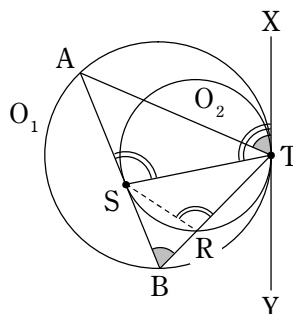
[結論]

$$\angle ATS = \angle BTS$$

[証明]

①より、 T において O_1, O_2 の両方に接する共通接線が引けるので、これを図のように XY とする。

XY は T における O_1, O_2 の接線……………③



円 O_1 において、③より

$$\angle ATX = \angle ABT \quad (\text{接弦定理}) \quad \dots\dots\dots ④$$

BT と O_2 の交点のうち、 T でない方を R とする。

円 O_2 において、③より

$$\angle STX = \angle SRT \quad (\text{接弦定理}) \quad \dots\dots\dots ⑤$$

②より

$$\angle SRT = \angle AST \quad (\text{接弦定理}) \quad \dots\dots\dots ⑥$$

⑤, ⑥より

$$\angle STX = \angle AST \quad \dots\dots\dots ⑦$$

⑦ - ④ より

$$\angle STX - \angle ATX = \angle AST - \angle ABT$$

$$\therefore \angle ATS = \angle AST - \angle ABT \quad \dots\dots\dots ⑧$$

一方、 $\triangle BST$ において、

$$\angle BTS = \angle AST - \angle ABT \quad \dots\dots\dots ⑨$$

(外角定理)

⑧, ⑨より

$$\angle ATS = \angle BTS$$

(q.e.d.)

問5.3

(1)

[仮定]

O_1 と O_2 は T で外接する ①

AB は A で O_1 に接する ②

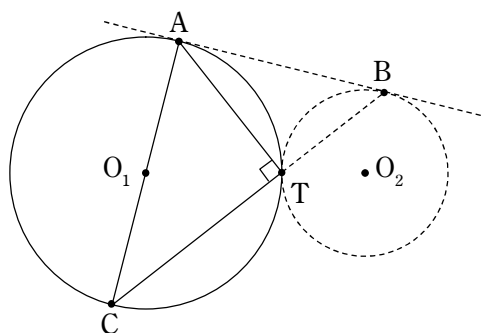
AB は B で O_2 に接する ③

[結論]

C, T, B は一直線上

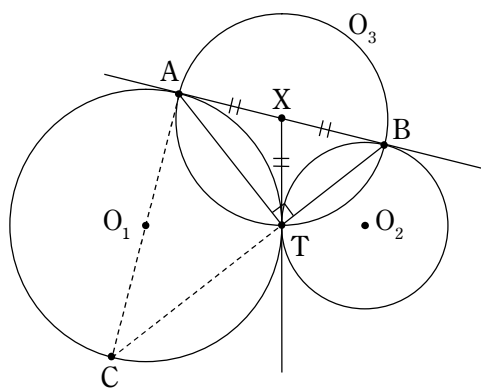
[証明]

$\angle ATC = 90^\circ$ (直径の円周角) ④



①より、 T において O_1, O_2 の両方に接する共通接線が引ける。この共通接線と AB の交点を X とする。

XT は T における O_1, O_2 の接線 ⑤



円外の点から円に2本の接線を引くとき、接点までの距離は等しいので、

②, ⑤より $XA = XT$ ⑥

③, ⑤より $XT = XB$ ⑦

⑥, ⑦より $XA = XT = XB$ ⑧

⑧より、 X を中心として A, T, B を通る円が描けるので、この円を O_3 とする。

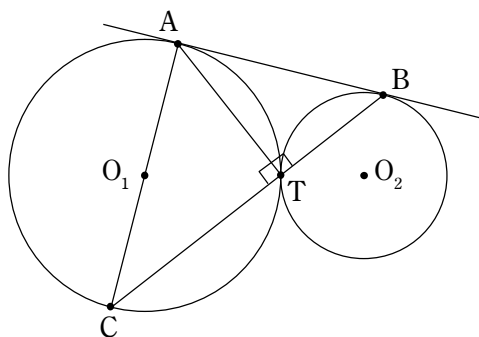
円 O_3 において、

$\angle ATB = 90^\circ$ (直径の円周角) ⑨

④, ⑨より

$\angle ATC + \angle ATB = 90^\circ + 90^\circ$

$\therefore \angle CTB = 180^\circ$ ⑩



⑩より、 C, T, B は一直線上にある。

(q.e.d.)

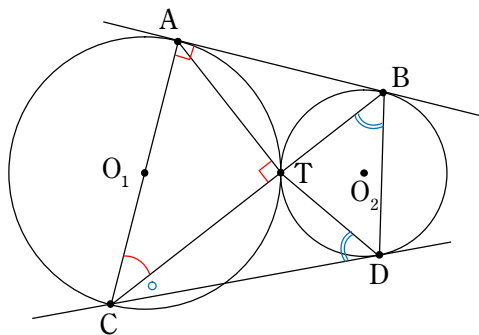
(2)

[新たな仮定]

CD は D で O_2 に接する ⑪

[結論]

$CA = CD$



[証明]

$\triangle ABC$ と $\triangle TAC$ において、

②より $\angle BAC = 90^\circ$ ⑫

④, ⑫より、

$\angle BAC = \angle ATC$ ⑬

また、

$\angle ACB = \angle TCA$ (共通) ⑭

⑬, ⑭より

$\triangle ABC \sim \triangle TAC$ (二角相等)

よって、対応辺の比を考えて、

$CA : CB = CT : CA$

$$\frac{CA}{CB} = \frac{CT}{CA}$$

$\therefore CA^2 = CB \times CT$ ⑮

一方、 $\triangle CDT$ と $\triangle CBD$ において、

⑪より、

$\angle CDT = \angle CBD$ (接弦定理) ⑯

また、

$\angle DCT = \angle BCD$ (共通) ⑰

⑯, ⑰より

$\triangle CDT \sim \triangle CBD$ (二角相等)

よって、対応辺の比を考えて、

$CD : CT = CB : CD$

$$\frac{CD}{CT} = \frac{CB}{CD}$$

$\therefore CD^2 = CB \times CT$ ⑱

⑮, ⑱より

$$CA^2 = CD^2$$

$\therefore CA = CD (> 0)$

(q.e.d.)