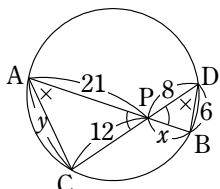


中2数学C 2019年度 夏期講習前期 宿題解答 §3 円と三角形の相似

H3.1

(1) $\triangle APC$ と $\triangle DPB$ において、



$\angle CAP = \angle BDP$ (円周角の定理)
 $\angle CPA = \angle BPD$ (対頂角)
 $\therefore \triangle APC \sim \triangle DPB$ (二角相等)

対応辺の比を考えて、

$$AP : PC = DP : PB$$

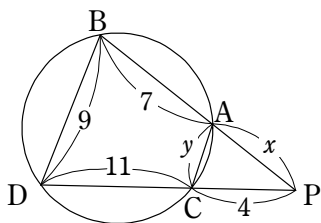
$$21 : 12 = 8 : x \quad \therefore x = 8 \times \frac{12}{21} = \boxed{\frac{32}{7}}$$

また、

$$AP : AC = DP : DB$$

$$21 : y = 8 : 6 \quad \therefore y = 21 \times \frac{6}{8} = \boxed{\frac{63}{4}}$$

(2) $\triangle APC$ と $\triangle DPB$ において、



$\angle PAC = \angle PDB$
 (内接四角形の定理)

$\angle APC = \angle BPD$ (共通)
 $\therefore \triangle APC \sim \triangle DPB$ (二角相等)

対応辺の比を考えて、

$$AP : PC = DP : PB$$

$$x : 4 = 15 : (x + 7)$$

$$\frac{x}{4} = \frac{15}{x+7}$$

$$x(x+7) = 4 \times 15$$

$$x^2 + 7x - 60 = 0$$

$$\therefore (x+12)(x-5) = 0$$

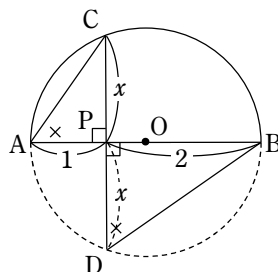
$$x > 0 \text{ だから } x = \boxed{5}$$

また、

$$AP : AC = DP : DB$$

$$5 : y = 15 : 9 \quad \therefore y = \frac{5 \times 9}{15} = \boxed{3}$$

(3) 図のように A, B, C, P を取り、さらに CP を延長して、円 O の弦 CD を取ると、 $\triangle OCD$ は $OC = OD$ の二等辺三角形であり、 $OP \perp CD$ なので、二等辺三角形の垂線は中線に一致することから、 $CP = DP = x$



$\triangle APC$ と $\triangle DPB$ において、
 $\angle CAP = \angle BDP$ (円周角の定理)
 $\angle CPA = \angle BPD$ (対頂角)
 $\therefore \triangle APC \sim \triangle DPB$ (二角相等)

対応辺の比を考えて、

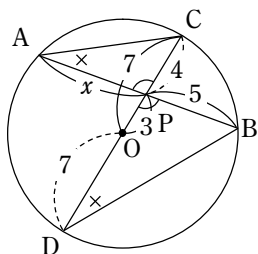
$$AP : PC = DP : PB$$

$$1 : x = x : 2 \quad \frac{1}{x} = \frac{x}{2}$$

$$x^2 = 2 \quad \therefore x = \boxed{\sqrt{2}} (> 0)$$

※ $\triangle APC$ と $\triangle CPB$ の相似を利用して求めることもできる。

- (4) 半径 CO を延長して、直径 CD を取ると、



$$DP = 7 + 3 = 10, PC = 7 - 3 = 4$$

$\triangle APC$ と $\triangle DPB$ において、

$$\angle CAP = \angle BDP \quad (\text{円周角の定理})$$

$$\angle CPA = \angle BPD \quad (\text{対頂角})$$

$$\therefore \triangle APC \sim \triangle DPB \quad (\text{二角相等})$$

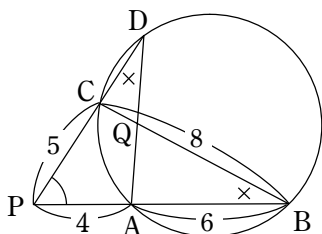
対応辺の比を考えて、

$$AP : PC = DP : PB$$

$$x : 4 = 10 : 5 \quad \therefore x = 4 \times \frac{10}{5} = \boxed{8}$$

H3.2

- (1) $\triangle BPC$ と $\triangle DPA$ において、



$$\angle PBC = \angle PDA \quad (\text{円周角の定理})$$

$$\angle BPC = \angle DPA \quad (\text{共通})$$

$$\therefore \triangle BPC \sim \triangle DPA \quad (\text{二角相等})$$

対応辺の比を考えて、

$$PC : CB = PA : AD$$

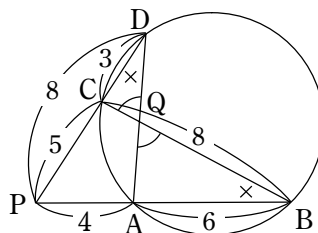
$$5 : 8 = 4 : AD \quad \therefore AD = 4 \times \frac{8}{5} = \boxed{\frac{32}{5}}$$

- (2) (1)の $\triangle BPC \sim \triangle DPA$ の対応辺の比を考えて、

$$PC : PB = PA : PD$$

$$5 : 10 = 4 : PD \quad \therefore PD = 4 \times \frac{10}{5} = 8$$

$$\text{よって、} CD = PD - PC = 8 - 5 = \boxed{3}$$



- (3) $\triangle AQB$ と $\triangle CQD$ において、

$$\angle QBA = \angle QDC \quad (\text{円周角の定理})$$

$$\angle AQB = \angle CQD \quad (\text{対頂角})$$

$$\therefore \triangle AQB \sim \triangle CQD \quad (\text{二角相等})$$

相似比は

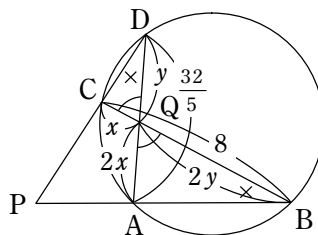
$$AB : CD = 6 : 3 = 2 : 1$$

なので、 $\triangle CQD$ の辺の長さを

$$CQ = x, QD = y$$

とおくと、

$$AQ = 2x, QB = 2y$$



BC, AD の長さに注目して、

$$\begin{cases} x + 2y = 8 & \dots\dots ① \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = \frac{32}{5} & \dots\dots ② \end{cases}$$

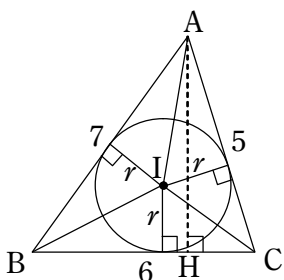
② $\times 2$ - ① より、

$$3x = \frac{64}{5} - 8 = \frac{24}{5} \quad \therefore CQ = x = \boxed{\frac{8}{5}}$$

※ 実は Q は AD の中点になっている。

H3.3

(1)



まず、ABC の面積を求めよう。

A から BC へ下ろした垂線の足を H とする。

AH = x , BH = y とおくと、

$$CH = BC - BH = 6 - y$$

$\triangle ABH$ にピタゴラスの定理を用いて、

$$7^2 = x^2 + y^2 \dots\dots\dots ①$$

$\triangle ACH$ にピタゴラスの定理を用いて、

$$5^2 = x^2 + (6 - y)^2$$

$$5^2 = x^2 + 36 - 12y + y^2 \dots\dots\dots ②$$

① - ② より、

$$49 - 25 = (x^2 + y^2) - (x^2 + 36 - 12y + y^2)$$

$$24 = -36 + 12y$$

$$\therefore y = (24 + 36) \times \frac{1}{12} = 5$$

したがって、①より

$$x^2 = 7^2 - 5^2$$

$$= 49 - 25 = 24$$

$x = AH > 0$ だから、

$$\therefore AH = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

よって、三角形 ABC の面積は、

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AH$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$$

一方、内心を I として、

$$\triangle ABC = \triangle IBC + \triangle ICA + \triangle IAB$$

$$= \frac{1}{2} \times (BC + CA + AB) \times r$$

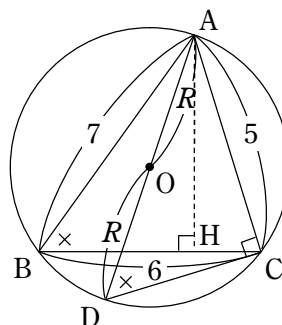
$$= \frac{1}{2} \times (6 + 5 + 7) \times r = 9r$$

とも表されるから、

$$6\sqrt{6} = 9r$$

$$\therefore r = \frac{6\sqrt{6}}{9} = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3}}$$

(2)



外心を O、直線 AO と円 O の交点のうち、A とは異なる方を D とする。

$\triangle ABH$ と $\triangle ADC$ において、

$$\angle ABH = \angle ADC \quad (\text{円周角の定理})$$

$$\angle AHB = \angle ACD \quad (= 90^\circ)$$

$$\therefore \triangle ABH \sim \triangle ADC \quad (\text{二角相等})$$

であるから、対応辺の比を考えて、

$$AB : AH = AD : AC$$

$$7 : 2\sqrt{6} = 2R : 5$$

$$2R = 5 \times \frac{7}{2\sqrt{6}} = \frac{35 \times \sqrt{6}}{2\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{35\sqrt{6}}{12}$$

$$\therefore R = \boxed{\frac{35\sqrt{6}}{24}}$$