中2数学B 2019年度 夏期講習後期 本問解答
§3 放物線と直線

※ 欠席してしまった場合は、問 3.1, 問 3.2 を自分で確認し、p.25 の宿題 H3.1, H3.3 に取り組んで提出してください。
余裕があれば，残りの問題にも取り組みましょう。

問3.1

(1) A, B が $C: y=x^2$ 上の点であることから y 座標も求めれば、その座標は、$A(1,1), B(3,9)$ となる。すると AB の傾きは、

$$\frac{9-1}{3-1}=\frac{8}{2}=4$$

となる。よって、直線 AB の式は、

$$y=4x+q$$

とおける。A を通ることから、

$$1=4\times 1+q, \quad \therefore q=-3$$

したがって、求める式は、

$$\boxed{y=4x-3}$$

(2) 求める直線の式を、

$$y=px+q \quad \cdots\cdots ①$$

とおく。$C: y=x^2$ との共有点の x 座標は、

$$x^2=px+q$$

$$\therefore x^2-px-q=0 \quad \cdots\cdots ②$$

の実数解である。直線①と C の共有点の x 座標が $x=1, 3$ なので、②の左辺は、

$$x^2-px-q=(x-1)(x-3)$$
$$=x^2-4x+3$$

と表される。両辺の x の係数と定数項を比較して、

$$-p=-4, \quad -q=3$$

$$\therefore p=4, \quad q=-3$$

以上より、求める直線の式は、

$$\boxed{y=4x-3}$$

問3.2

$\boxed{\text{方法 1}}$ B の x 座標を β とおく。

l は傾き 2 の直線なので、その式は、

$$y=2x+q$$

とおける。したがって、C と l の交点 A, B の x 座標は、

$$x^2=2x+q$$

$$\therefore x^2-2x-q=0 \quad \cdots\cdots ①$$

の実数解である。この解が $x=-2, \beta$ だから、①の左辺は、

$$x^2-2x-q=(x+2)(x-\beta) \quad \cdots\cdots ②$$

と因数分解される。②の両辺の x の係数を比較して、

$$-2=2-\beta, \quad \therefore \beta=4$$

B の y 座標は、$y=x^2$ に $x=4$ を代入して、$y=4^2=16$ だから、B の座標は、

$$\boxed{B(4,16)}$$

$\boxed{\text{方法 2}}$ B の x 座標を β とおく。A, B が $C: y=x^2$ 上の点であることから y 座標も求めれば、その座標は、$A(-2,4)$, $B(\beta,\beta^2)$ となる。すると AB の傾きは、

$$\frac{\beta^2-4}{\beta-(-2)}=\frac{(\beta+2)(\beta-2)}{\beta+2}=\beta-2$$

であり、これが 2 に等しいことから、

$$\beta-2=2, \quad \therefore \beta=4$$

したがって、B の座標は、

$$\boxed{B(4,16)}$$

問3.3

放物線 $y=x^2$ と直線 $y=200x+1$ は確かに2交点A, Bをもつ。(直線の y 切片が正であることに注意しよう。)

$\boxed{\text{方法 1}}$　放物線 $y=x^2$ と直線 $y=200x+1$ の交点A, Bの x 座標は、

$$x^2=200x+1$$

$$\therefore x^2-200x-1=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

の実数解である。これを解かずにMの x 座標を求めよう。(最初に述べたことから、①は相異なる2実解をもつ。)

①の2実解(A, Bの x 座標)を $\alpha,\ \beta$ とおく。すると①の左辺は、

$$x^2-200x-1=(x-\alpha)(x-\beta)$$

と因数分解される。両辺の x の係数を比較して、

$$-200=-(\alpha+\beta),$$

$$\therefore \alpha+\beta=200$$

を得る。中点Mの x 座標は、A, Bの x 座標の平均で、

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{200}{2}=\boxed{100}$$

$\boxed{\text{方法 2}}$　①も作らずに、次のように解決することもできる。

A, Bは放物線 $y=x^2$ 上にあるので、その座標を $\mathrm{A}(\alpha,\alpha^2)$, $\mathrm{B}(\beta,\beta^2)$ ($\alpha<\beta$)とおける。

このとき、直線ABの傾きは

$$\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}=\frac{(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}=\alpha+\beta$$

となる。これが、直線 $y=200x+1$ の傾き200と一致するから、$\alpha+\beta=200$ である。

中点Mの x 座標は、A, Bの x 座標の平均で、

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{200}{2}=\boxed{100}$$