中2数学B 2019年度 夏期講習後期 宿題解答
§3 放物線と直線

H3.1

(1) 求めるBのx座標をβとおく。

lは傾き3の直線なので、その式は、

$$y=3x+q$$

とおける。したがって、Cとlの交点A, Bのx座標は、

$$x^2=3x+q$$

$$\therefore x^2-3x-q=0 \quad \cdots\cdots ①$$

の実数解である。よって、①の左辺は、

$$x^2-3x-q=(x-1)(x-\beta) \quad \cdots\cdots ②$$

と因数分解される。②の両辺のxの係数を比較して、

$$-3=-1-\beta, \quad \therefore \beta=2$$

Bのy座標は、$y=x^2$に$x=2$を代入して、$y=2^2=4$だから、Bの座標は、

$$\boxed{\mathrm{B}(2,4)}$$

別解　求めるBのx座標をβとおく。

A, Bが$C:y=x^2$上の点であることからy座標も求めれば、その座標は、$\mathrm{A}(1,1)$, $\mathrm{B}(\beta,\beta^2)$となる。するとABの傾きは、

$$\frac{\beta^2-1}{\beta-1}=\frac{(\beta+1)(\beta-1)}{\beta-1}=\beta+1$$

であり、これが3に等しいことから、

$$\beta+1=3, \quad \therefore \beta=2$$

したがって、Bの座標は、$\boxed{\mathrm{B}(2,4)}$

(2) 求めるBのx座標をβとおく。

lは傾き$\frac{1}{3}$の直線なので、その式は、

$$y=\frac{1}{3}x+q$$

とおける。したがって、Cとlの交点A, Bのx座標は、

$$-x^2=\frac{1}{3}x+q$$

$$\therefore x^2+\frac{1}{3}x+q=0 \quad \cdots\cdots ①$$

の実数解である。よって、①の左辺は、

$$x^2+\frac{1}{3}x+q=(x+2)(x-\beta) \quad \cdots\cdots ②$$

と因数分解される。②の両辺のxの係数を比較して、

$$\frac{1}{3}=2-\beta, \quad \therefore \beta=\frac{5}{3}$$

Bのy座標は、$y=-x^2$に$x=\frac{5}{3}$を代入して、$y=-\left(\frac{5}{3}\right)^2=-\frac{25}{9}$だから、Bの座標は、$\boxed{\mathrm{B}\left(\frac{5}{3},-\frac{25}{9}\right)}$

別解　求めるBのx座標をβとおく。

A, Bが$C:y=-x^2$上の点であることからy座標も求めれば、その座標は、$\mathrm{A}(-2,-4)$, $\mathrm{B}(\beta,-\beta^2)$となる。するとABの傾きは、

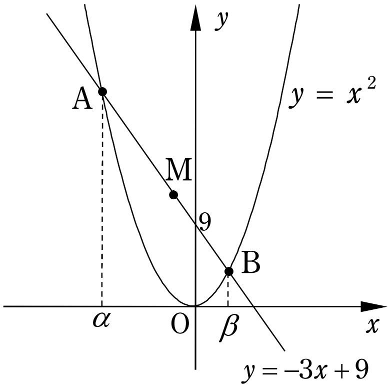
$$\frac{-\beta^2-(-4)}{\beta-(-2)}=\frac{-(\beta+2)(\beta-2)}{\beta+2}=-(\beta-2)$$

であり、これが$\frac{1}{3}$に等しいことから、

$$-(\beta-2)=\frac{1}{3}, \quad \therefore \beta=\frac{5}{3}$$

したがって、Bの座標は、$\boxed{\mathrm{B}\left(\frac{5}{3},-\frac{25}{9}\right)}$

H3.2



放物線 $y=x^2$ と直線 $y=-3x+9$ は確かに 2 点で交わっている。(直線の y 切片が正であることに着目しよう。)

解 1 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=-3x+9$ の交点 A, B の x 座標は、

$$x^2=-3x+9$$

$$\therefore x^2+3x-9=0 \quad \cdots\cdots ①$$

の実数解である。最初に述べたことから、①は 2 実解をもつ。それら (A, B の x 座標) を $\alpha,\ \beta$ とおくと①の左辺は、

$$x^2+3x-9=(x-\alpha)(x-\beta)$$

と因数分解される。両辺の x の係数を比較して、

$$3=-(\alpha+\beta),\ \therefore \alpha+\beta=-3$$

を得る。中点 M の x 座標は、A, B の x 座標の平均で、

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\boxed{-\frac{3}{2}}$$

解 2 ①も作らずに、次のように解決することもできる。

A, B は放物線 $y=x^2$ 上にあるので、その座標を $A(\alpha,\alpha^2)$, $B(\beta,\beta^2)$ ($\alpha<\beta$) とおける。このとき、直線 AB の傾きは

$$\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}=\frac{(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}=\alpha+\beta$$

となる。これが、直線 $y=-3x+9$ の傾き -3 と一致するから、$\alpha+\beta=-3$ である。中点 M の x 座標は、A, B の x 座標の平均で、

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\boxed{-\frac{3}{2}}$$

H3.3

求める直線の式を、

$$y=px+q \quad \cdots\cdots ①$$

とおく。$C: y=x^2$ との共有点の x 座標は、

$$x^2=px+q$$

$$\therefore x^2-px-q=0 \quad \cdots\cdots ②$$

の実数解である。直線①と放物線 $y=x^2$ の共有点が、x 座標が $1\pm\sqrt{3}$ の 2 点なので、②の左辺は、

$$\begin{aligned} x^2-px-q &= \left\{x-(1+\sqrt{3})\right\}\left\{x-(1-\sqrt{3})\right\} \\ &= \left\{(x-1)-\sqrt{3}\right\}\left\{(x-1)+\sqrt{3}\right\} \\ &= (x-1)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2 \\ &= x^2-2x+1-3 \\ &= x^2-2x-2 \end{aligned}$$

と表される。両辺の x の係数と定数項を比較して、

$$-p=-2,\quad -q=-2$$

$$\therefore p=2,\quad q=2$$

以上より、求める直線の式は、

$$\boxed{y=2x+2}$$