

中2数学B 2019年度 夏期講習後期 宿題解答

§4 接線と重解条件

H4.1

(1) 求める接線の式を、

$$y = px + q \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$

とおく。放物線 $y = x^2$ との共有点の x 座標は、

$$x^2 = px + q$$

$$\therefore x^2 - px - q = 0 \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{2}$$

の実数解である。直線①と放物線 $y = x^2$ が $x = 3$ で接するので、②の左辺は、

$$\begin{aligned} x^2 - px - q &= (x - 3)^2 \\ &= x^2 - 6x + 9 \end{aligned}$$

と表される。これより、

$$-p = -6, -q = 9$$

$$\therefore p = 6, q = -9$$

であり、求める接線の式は、

$$\boxed{y = 6x - 9}$$

(2) 求める接線の式を、(1)と同様におくと、今度は、直線①と放物線 $y = x^2$ が $x = -1$ で接するので、②の左辺は、

$$\begin{aligned} x^2 - px - q &= (x + 1)^2 \\ &= x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

と表される。これより、

$$-p = 2, -q = 1$$

$$\therefore p = -2, q = -1$$

であり、求める接線の式は、

$$\boxed{y = -2x - 1}$$

H4.2

(1) 直線 $y = -4x + k$ が放物線 $y = x^2$ と接するのは、共有点の x 座標を求める方程式

$$x^2 = -4x + k$$

すなわち、

$$x^2 + 4x - k = 0 \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が重解をもつときである。

解1 ①を平方完成により変形すると、

$$x^2 + 4x + 4 = k + 4$$

$$(x + 2)^2 = k + 4$$

となる。よって、①が重解をもつのは、

$$k + 4 = 0, \therefore \boxed{k = -4}$$

のときである。

解2 ①が $x = t$ を重解にもつとすると、左辺は、

$$\begin{aligned} x^2 + 4x - k &= (x - t)^2 \\ &= x^2 - 2tx + t^2 \end{aligned}$$

と表される。係数を比較して、

$$\begin{cases} 4 = -2t & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ -k = t^2 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

②より $t = -2$ だから、③に代入して、

$$-k = (-2)^2 = 4, \therefore \boxed{k = -4}$$

解3 ①の 1次の係数に着目して、①が重解をもつとすればそれは $x = -2$ であることがわかるから、①の左辺は、

$$\begin{aligned} x^2 + 4x - k &= (x + 2)^2 \\ &= x^2 + 4x + 4 \end{aligned}$$

と表される。定数項を比較して、

$$\boxed{k = -4}$$

- (2) 直線 $y = ax - 3$ が放物線 $y = x^2$ と接するのは、共有点の x 座標を求める方程式

$$x^2 = ax - 3$$

すなわち、

$$x^2 - ax + 3 = 0 \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が重解をもつときである。

解 1 ①を平方完成により変形すると、

$$x^2 - 2 \times \frac{a}{2}x + \frac{a^2}{4} = -3 + \frac{a^2}{4}$$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{-12 + a^2}{4}$$

となる。よって、①が重解をもつのは、

$$-12 + a^2 = 0, \quad \therefore \boxed{a = 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}}$$

のときである。

解 2 ①が $x = t$ を重解にもつとすると、左辺は、

$$x^2 - ax + 3 = (x - t)^2$$

$$= x^2 - 2tx + t^2$$

と表される。係数を比較して、

$$\begin{cases} -a = -2t & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 3 = t^2 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

③より $t = \sqrt{3}, -\sqrt{3}$ だから、②より得られる $a = 2t$ に代入して、

$$\boxed{a = 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}}$$

解 3 ①の定数項に着目して、①が重解をもつとすればそれは $x = \pm\sqrt{3}$ であることがわかるから、①の左辺は、

$$x^2 - ax + 3 = (x \mp \sqrt{3})^2$$

$$= x^2 \mp 2\sqrt{3}x + 3$$

と表される。 x の項を比較して、

$$\boxed{a = 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}}$$

(以上、すべて複号同順。)