中2数学C 2019年度 夏期講習後期 本問解答
§2 グラフと不等式

※ 欠席してしまった場合は、問 2.2, 問 2.4, 問 2.5 を自分で確認し、
p.19 の宿題 H2.1〜H2.3 に取り組んで提出してください。

問2.1

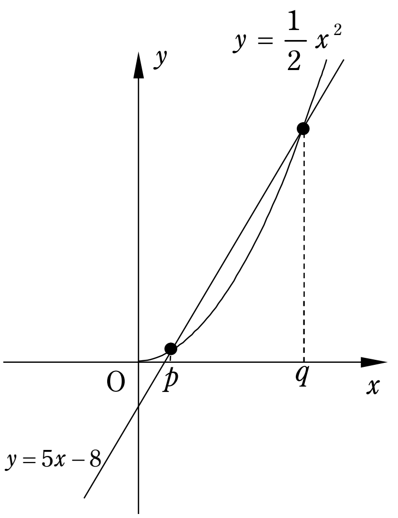
地点Oを原点とし、バスの進行方向を正の向きにとる。バスが地点Oを出発してからの時刻を x [秒] とすると、バスの位置 y [m] は

$$y = \frac{1}{2}x^2 \quad (0 \leqq x \leqq 10) \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

であり、自転車の位置 y [m] は、

$$y = 5x - 8 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

である。



求める p, q の値は、「①, ②どちらの関数の式で y を計算しても同じになるような x の値」、つまり、x の2次方程式

$$\frac{1}{2}x^2 = 5x - 8$$

の2解である。（それはまた、①, ②のグラフの交点の x 座標でもある。）

これを解くと、

$$x^2 = 10x - 16$$
$$x^2 - 10x + 16 = 0$$
$$(x-2)(x-8) = 0$$
$$\therefore x = 2, 8$$

これらは $0 \leqq x \leqq 10$ をみたすから、

$$\boxed{p = 2,\ q = 8}$$

である。

問2.2

（1）放物線 $y=x^2$ と直線 $y=-2x+3$ の交点の x 座標は、$x^2=-2x+3$ すなわち $x^2+2x-3=0$ の実数解である。これを解くと、

$$(x-1)(x+3)=0, \quad \therefore x=-3,1$$

y 座標は、$y=x^2$ に代入して

$x=-3$ のとき $y=(-3)^2=9$,

$x=1$ のとき $y=1^2=1$

したがって、２つのグラフの交点は

$\boxed{(-3,9),\ (1,1)}$

［注意］ $y=-2x+3$ の方でも y 座標を計算すると、検算になる。

（2）放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+1$ の交点の x 座標は、$x^2=x+1$ すなわち $x^2-x-1=0$ の実数解である。これを解くと、

$$x^2-x+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{4},$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

$$x-\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \therefore \ x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

y 座標は、$y=x+1$ に代入して（今度は $y=x^2$ に代入するよりも直線の式の方に代入した方が楽)、

$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき

$$y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1=\frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

$x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ のとき

$$y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

したがって、２つのグラフの交点は

$$\boxed{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right),\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

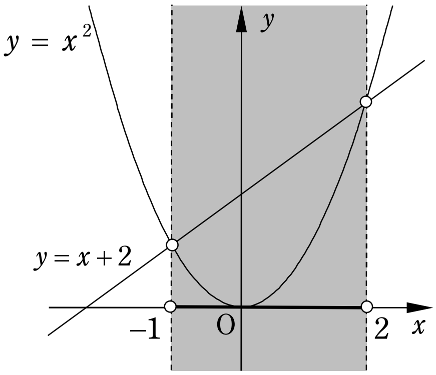
問2.3

(1) $x^2 < x+2$ ……① をみたす x の範囲は、$y=x^2$ のグラフが $y=x+2$ のグラフより下側にあるような x の範囲である。2つのグラフの交点の x 座標は、$x^2=x+2$ すなわち $x^2-x-2=0$ の実数解であり、これを解くと、

$(x+1)(x-2)=0, \quad \therefore x=-1, 2$

である。したがって、図より、①をみたす x の範囲（不等式①の解）は、

$\boxed{-1<x<2}$



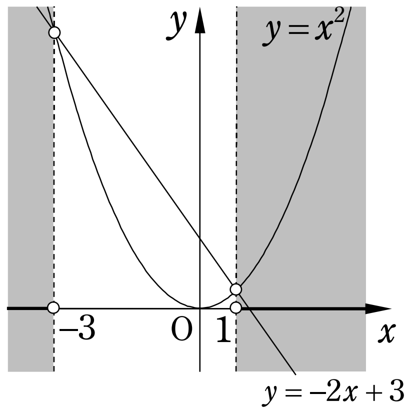
(2) $x^2 > -2x+3$ ……① の解は、$y=x^2$ のグラフが $y=-2x+3$ のグラフより上側にあるような x の範囲である。2つのグラフの交点の x 座標を求めると、

$x^2=-2x+3, \quad x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0, \quad \therefore x=-3, 1$

である。したがって、図より、①の解は、

$\boxed{x<-3,\ 1<x}$



問2.4

(1) $x^2 < x+1$ ……① の解は、 $y=x^2$ のグラフが $y=x+1$ のグラフより下側にあるような x の範囲である。2 つのグラフの交点の x 座標を求めると、

$$x^2 = x+1$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$

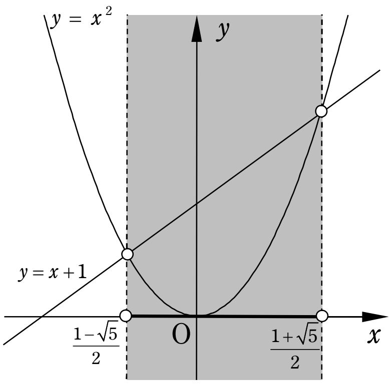
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$x - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \quad x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

である。したがって、図より、①の解は、

$$\boxed{\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$



(2) $x^2 > -\dfrac{1}{2}x + 3$ ……① の解は、 $y=x^2$ のグラフが $y=-\dfrac{1}{2}x+3$ のグラフより上側にあるような x の範囲である。2 つのグラフの交点の x 座標を求めると、

$$x^2 = -\frac{1}{2}x + 3$$

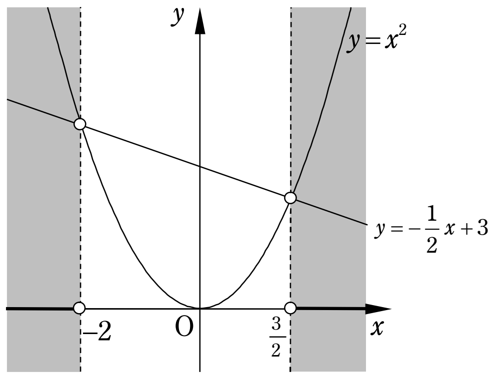
$$2x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+2)(2x-3) = 0$$

$$\therefore \quad x = -2, \frac{3}{2}$$

である。したがって、図より、①の解は、

$$\boxed{x < -2,\ \frac{3}{2} < x}$$



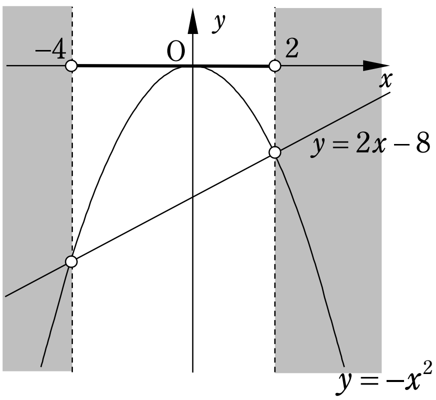
(3) $-x^2 < 2x - 8$ ……① の解は、 $y = -x^2$ のグラフが $y = 2x - 8$ のグラフより下側にあるような x の範囲である。2 つのグラフの交点の x 座標を求めると、

$-x^2 = 2x - 8$,　　$x^2 + 2x - 8 = 0$,

$(x+4)(x-2) = 0$,　∴ $x = -4, 2$,

である。したがって、図より、①の解は、

$\boxed{x < -4,\ 2 < x}$



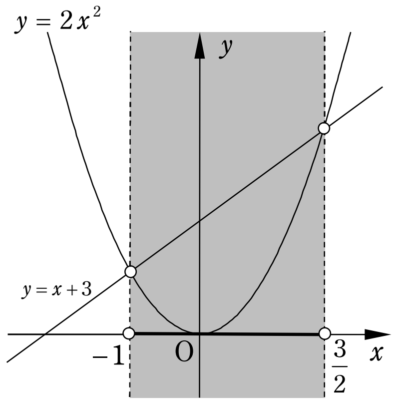
(4) $x + 3 > 2x^2$ ……① の解は、 $y = x + 3$ のグラフが $y = 2x^2$ のグラフより上側にあるような x の範囲である。2 つのグラフの交点の x 座標を求めると、

$x + 3 = 2x^2$,　$2x^2 - x - 3 = 0$,

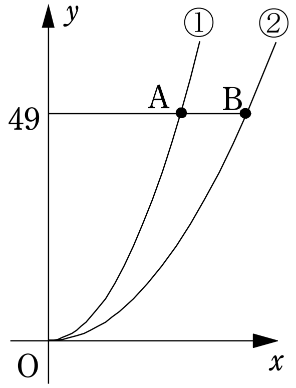
$(x+1)(2x-3) = 0$,　$\therefore x = -1, \dfrac{3}{2}$

である。したがって、図より、①の解は、

$\boxed{-1 < x < \dfrac{3}{2}}$



問2.5



(1) $x = 1.5,\ y = 63$ のときの BMI は、

$$\frac{63}{1.5^2} = 63 \div \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \cancel{63}^{7} \times \frac{4}{\cancel{9}_{1}} = \boxed{28}$$

である。

(2)

(i) BMI=25 のときの、身長 x と体重 y の関係は、

$$\frac{y}{x^2} = 25, \quad \therefore y = 25x^2 \ \cdots\cdots ③$$

である。同様に、BMI=20 のときの x と y の関係は、

$$y = 20x^2 \ \cdots\cdots ④$$

である。同じ x の値に対して、③で計算される y の値は、④で計算される y の値よりも大きい。よって、③のグラフの方が④のグラフより上側にある。したがって、 BMI=25 のときのグラフが①で、$\boxed{\text{BMI=20 のときのグラフは②}}$である。

(ii) A はグラフ①上の y 座標が 49 の点だから、その x 座標を求めるには、③に $y = 49$ を代入した x の方程式を解けばよい。

$$49 = 25x^2, \quad x^2 = \frac{49}{25}$$

図より、$x > 0$ だから、$x = \frac{7}{5}$ である。したがって、A の座標は $\boxed{\mathrm{A}\left(\frac{7}{5}, 49\right)}$ である。

同様に、④に $y = 49$ を代入して B の x 座標を求めると、

$$49 = 20x^2, \quad x^2 = \frac{49}{20}, \quad \therefore x = \frac{7}{2\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{10}\ (>0)$$

である。したがって、B の座標は $\boxed{\mathrm{B}\left(\frac{7\sqrt{5}}{10}, 49\right)}$ である。

(3)　身長 1.6 m の C 君の BMI が 20 であるときの体重 y は、④より、

$$y = 20 \times 1.6^2 = 20 \times 2.56 = 51.2 \text{ (kg)}$$

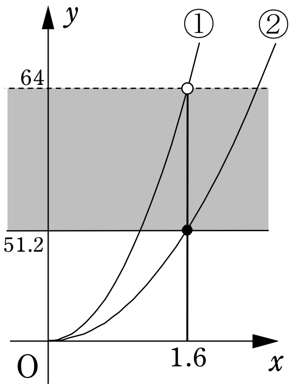
であり、BMI が 25 であるときの体重 y は、③より、

$$y = 25 \times 1.6^2 = 25 \times 2.56 = 64 \text{ (kg)}$$

である。したがって、BMI が 20 以上 25 未満であるための、体重 y の範囲は、

$\boxed{51.2 \leqq y < 64 \quad \text{(51.2kg 以上 64kg 未満)}}$

である（右図参照）。



(4)　D 君は BMI=20 だから、身長が x (m)であるとすると、その体重 y (kg)は、④より、$y = 20x^2$ である。この体重がブローカー式での理想体重 $y = (100x - 100) \times 0.9$ 以下であるのは、x が

$$20x^2 \leqq (100x - 100) \times 0.9 \quad \cdots\cdots ⑤$$

をみたすときである。不等式⑤の解は、④のグラフ②より直線 $y = (100x - 100) \times 0.9$ が上側（y 座標が等しいときも含む）にあるような x の範囲である。２つのグラフの交点の x 座標を求めると、

$$20x^2 = (100x - 100) \times 0.9$$

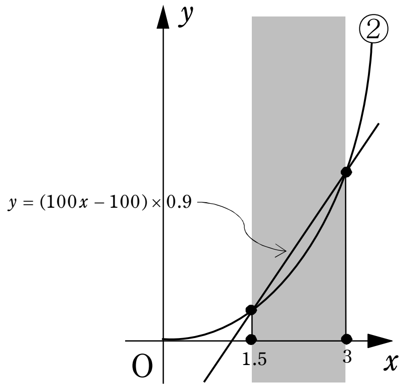
$$20x^2 = 90(x - 1)$$

$$x^2 = \frac{9}{2}(x - 1)$$

$$x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{2} = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = \frac{3}{2}, 3$$



となる。したがって、右図より、⑤の解は

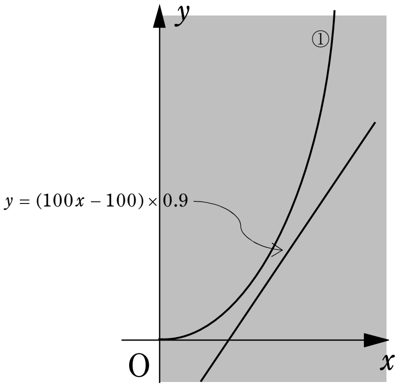
$\frac{3}{2} \leqq x \leqq 3$　である。

つまり求める身長 x の範囲は、$\boxed{\text{1.5m 以上 3m 以下}}$である。

(5)　E君はBMI=25だから、今度は③を用いると、E　君の体重がブローカー式での理想体重以上であるのは、x が

$$25x^2 \geqq (100x-100)\times 0.9 \quad \cdots\cdots ⑥$$

をみたすときである。不等式⑥の解は、③のグラフ①より直線 $y=(100x-100)\times 0.9$ が下側（y 座標が等しいときも含む）にあるような x の範囲である。２つのグラフの共有点の x 座標を求めようとすると、



$$25x^2=(100x-100)\times 0.9$$

$$25x^2=90(x-1)$$

$$x^2=\frac{\cancel{90}^{18}}{\cancel{25}_{5}}(x-1)$$

$$x^2-\frac{18}{5}x=-\frac{18}{5}$$

$$x^2-\frac{18}{5}x+\frac{81}{25}=-\frac{18}{5}+\frac{81}{25}$$

$$\left(x-\frac{9}{5}\right)^2=-\frac{9}{25} \quad \cdots\cdots ⑦$$

となるが、x が実数のとき、⑦の左辺は0以上であるから、⑦は成り立たない。つまり、２つのグラフの共有点は存在しない。したがって、図のように放物線①は常に直線 $y=(100x-100)\times 0.9$ より上側にあることがわかる。したがって⑥は任意の実数 x で成立する。

したがって、求める身長 x の範囲は $\boxed{\text{（正の）実数全体}}$ である。