

## 中2数学C 2019年度 夏期講習後期 本問解答

### §3 放物線と直線

※ 欠席してしまった場合は、問 3.1～問 3.3 を(余裕があれば問 3.4 も) 自分で確認し、p.23 の宿題 H3.1～H3.3 に取り組んで提出してください。

#### 問3.1

放物線  $y = x^2$  と直線  $y = 200x + 1$  は確かに 2 交点 A, B をもつ。(直線の  $y$  切片が正であることに注意しよう。)

**方法 1** 放物線  $y = x^2$  と直線  $y = 200x + 1$  の交点 A, B の  $x$  座標は、

$$x^2 = 200x + 1$$

$$\therefore x^2 - 200x - 1 = 0 \quad \cdots \cdots \cdots \text{①}$$

の実数解である。これを解かずに M の  $x$  座標を求めよう。(最初に述べたことから、①は相異なる 2 実解をもつ。)

①の 2 実解 (A, B の  $x$  座標) を  $\alpha, \beta$  とおく。すると①の左辺は、

$$x^2 - 200x - 1 = (x - \alpha)(x - \beta)$$

と因数分解される。両辺の  $x$  の係数を比較して、

$$-200 = -(\alpha + \beta),$$

$$\therefore \alpha + \beta = 200$$

を得る。中点 M の  $x$  座標は、A, B の  $x$  座標の平均で、

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{200}{2} = \boxed{100}$$

**方法 2** ①も作らずに、次のように解決することもできる。

A, B は放物線  $y = x^2$  上にあるので、その座標を  $A(\alpha, \alpha^2), B(\beta, \beta^2)$  ( $\alpha < \beta$ ) とおける。

このとき、直線 AB の傾きは

$$\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta - \alpha} = \frac{(\beta + \alpha)(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} = \alpha + \beta$$

となる。これが、直線  $y = 200x + 1$  の傾き 200 と一致するから、 $\alpha + \beta = 200$  である。

中点 M の  $x$  座標は、A, B の  $x$  座標の平均で、

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{200}{2} = \boxed{100}$$

### 問3.2

**方法1** Bの $x$ 座標を $\beta$ とおく。

$l$ は傾き2の直線なので、その式は、

$$y = 2x + q$$

とおける。したがって、 $C$ と $l$ の交点A, Bの $x$ 座標は、

$$x^2 = 2x + q$$

$$\therefore x^2 - 2x - q = 0 \quad \cdots \cdots \cdots \text{①}$$

の実数解である。この解が $x = -2, \beta$ だから、①の左辺は、

$$x^2 - 2x - q = (x + 2)(x - \beta) \quad \cdots \cdots \cdots \text{②}$$

と因数分解される。②の両辺の $x$ の係数を比較して、

$$-2 = 2 - \beta, \quad \therefore \beta = 4$$

Bの $y$ 座標は、 $y = x^2$ に $x = 4$ を代入して、 $y = 4^2 = 16$ だから、Bの座標は、

$$\boxed{B(4, 16)}$$

**方法2** Bの $x$ 座標を $\beta$ とおく。A, Bが $C: y = x^2$ 上の点であることから $y$ 座標も求めれば、その座標は、 $A(-2, 4)$ ,  $B(\beta, \beta^2)$ となる。するとABの傾きは、

$$\frac{\beta^2 - 4}{\beta - (-2)} = \frac{(\beta + 2)(\beta - 2)}{\beta + 2} = \beta - 2$$

であり、これが2に等しいことから、

$$\beta - 2 = 2, \quad \therefore \beta = 4$$

したがって、Bの座標は、

$$\boxed{B(4, 16)}$$

### 問3.3

**方法1** A, Bが $C: y = x^2$ 上の点であることから $y$ 座標も求めれば、その座標は、 $A(1, 1)$ ,  $B(3, 9)$ となる。するとABの傾きは、

$$\frac{9 - 1}{3 - 1} = \frac{8}{2} = 4$$

となる。よって、直線ABの式は、

$$y = 4x + q$$

とおける。Aを通ることから、

$$1 = 4 \times 1 + q, \quad \therefore q = -3$$

したがって、求める式は、

$$\boxed{y = 4x - 3}$$

**方法2** 求める直線の式を、

$$y = px + q \quad \cdots \cdots \cdots \text{①}$$

とおく。 $C: y = x^2$ との共有点の $x$ 座標は、

$$x^2 = px + q$$

$$\therefore x^2 - px - q = 0 \quad \cdots \cdots \cdots \text{②}$$

の実数解である。直線①と $C$ の共有点の $x$ 座標が $x = 1, 3$ なので、②の左辺は、

$$\begin{aligned} x^2 - px - q &= (x - 1)(x - 3) \\ &= x^2 - 4x + 3 \end{aligned}$$

と表される。両辺の $x$ の係数と定数項を比較して、

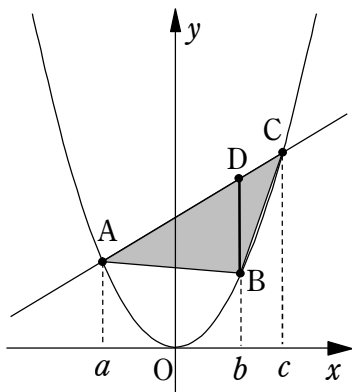
$$-p = -4, \quad -q = 3$$

$$\therefore p = 4, \quad q = -3$$

以上より、求める直線の式は、

$$\boxed{y = 4x - 3}$$

### 問3.4



直線 AC 上で B と  $x$  座標が一致する点を D とおく。△ABD と △BCD に分割し、BD を底辺とみて面積を計算しよう。

直線 AC の式を、

$$y = px + q \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$

とおく。C:  $y = x^2$  との共有点の  $x$  座標は、

$$x^2 = px + q$$

$$\therefore x^2 - px - q = 0 \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{2}$$

の実数解である。直線①と C の共有点の  $x$  座標が  $x = a, c$  なので、②の左辺は、

$$x^2 - px - q = (x - a)(x - c) \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{3}$$

と因数分解される。両辺の  $x$  の係数と定数項を比較して、

$$-p = -(a + c), \quad -q = ac$$

$$\therefore p = a + c, \quad q = -ac$$

したがって、直線 AC の式は、

$$y = (a + c)x - ac \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{4}$$

である。④に  $x = b$  を代入して、D の  $y$  座標を求めると、

$$y = (a + c)b - ac$$

となる。B の  $y$  座標は  $b^2$  だから、線分 BD の長さは、

$$\begin{aligned} BD &= \{(a + c)b - ac\} - b^2 \\ &= -\{b^2 - (a + c)b + ac\} \\ &= -(b - a)(b - c) \\ &= (a - b)(b - c) \end{aligned}$$

と表される。

以上より、△ABC の面積は、

$$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle CBD$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \times BD \times (b - a) + \frac{1}{2} \times BD \times (c - b) \\ &= \frac{1}{2} \times BD \times \{(b - a) + (c - b)\} \\ &= \frac{1}{2} \times BD \times (c - a) \\ &= \frac{1}{2} (a - b)(b - c)(c - a) \end{aligned}$$

と表せる。

※ 直線 AC の式④を求めずに BD の長さを求めることができる。

①に  $x = b$  を代入すれば D の  $y$  座標が求まり、 $y = x^2$  に  $x = b$  を代入すれば B の  $y$  座標が求まるのだから、

$$(px + q) - x^2$$

に  $x = b$  を代入すれば BD の長さが求まる。③より、

$$\begin{aligned} (px + q) - x^2 &= -(x^2 - px - q) \\ &= -(x - a)(x - c) \end{aligned}$$

だから、ここに  $x = b$  を代入して、

$$\begin{aligned} BD &= -(b - a)(b - c) \\ &= (a - b)(a - c) \end{aligned}$$

である。