

中2数学C 2019年度 夏期講習後期 本問解答

§4 接線と重解条件

※ 欠席してしまった場合は、問 4.2～問 4.3 を(余裕があれば問 4.4 も)自分で確認し、p.27 の宿題 H4.1, H4.2 に(余裕があれば H4.3, H4.4 も)取り組んで提出してください。

問4.1

(1)

- (i) $C: y = x^2$ と直線 $y = 2x + 3$ の交点の x 座標は、方程式

$$x^2 = 2x + 3$$

すなわち、

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \dots\dots\dots ①$$

の実数解である。①を解くと

$$(x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -1, 3$$

となるから、2つのグラフの交点は、

$$\boxed{(-1, 1), (3, 9)}$$

- (ii) C と直線 $y = 2x$ の交点の x 座標は、方程式

$$x^2 = 2x$$

すなわち、

$$x^2 - 2x = 0 \dots\dots\dots ②$$

の実数解である。②を解くと

$$x(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 0, 2$$

となるから、2つのグラフの交点は、

$$\boxed{(0, 0), (2, 4)}$$

- (iii) C と直線 $y = 2x - 1$ の交点の x 座標は、方程式

$$x^2 = 2x - 1$$

すなわち、

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \dots\dots\dots ③$$

の実数解である。③を解くと

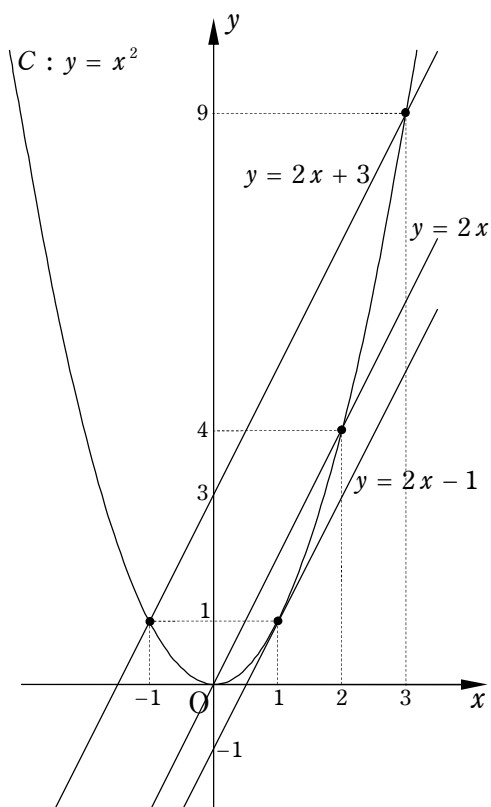
$$(x-1)^2 = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ (重解)}$$

となるから、2つのグラフの交点は、

$$\boxed{(1, 1)}$$

以上の結果を考慮して、 C および 3本の直線をまとめて図示すると下のようになる。



- (2) $C: y = x^2$ の $x=1$ における接線の式が、

$$y = px + q \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{4}$$

であるとする。 C との共有点の x 座標は、方程式

$$x^2 = px + q$$

すなわち、

$$\therefore x^2 - px - q = 0 \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{5}$$

の実数解である。 C と直線①の共有点が x 座標が 1 の点のみであるから、⑤は $x=1$ を重解にもつことになる。よって、⑤の左辺は

$$x^2 - px - q = (x-1)^2$$

と因数分解される。右辺を展開すると、

$$x^2 - px - q = x^2 - 2x + 1$$

となる (x の 2 次式として両辺が等しい) から、係数を比較して、

$$\begin{cases} -p = -2 \\ -q = 1 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} p = 2 \\ q = -1 \end{cases}$$

を得る。④に代入して、求める接線の式は、

$$\boxed{y = 2x - 1}$$

問4.2

- (1) $C: y = x^2$ の $x=-3$ における接線の式を、

$$y = px + q \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$

とおく。 C との共有点の x 座標は、

$$x^2 = px + q$$

$$x^2 - px - q = 0 \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{2}$$

の実数解である。 C と直線①が $x=-3$ で接するので、②は $x=-3$ を重解にもつ。よって、②の左辺は、

$$\begin{aligned} x^2 - px - q &= (x+3)^2 \\ &= x^2 + 6x + 9 \end{aligned}$$

と表される。係数を比較して、

$$\begin{cases} -p = 6 \\ -q = 9 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} p = -6 \\ q = -9 \end{cases}$$

を得るから、①に代入して、求める接線の式は、

$$\boxed{y = -6x - 9}$$

- (2) $C: y = x^2$ の $x=t$ における接線の式を、

$$y = px + q \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$

とおく。(1)と同様に、 x の方程式

$$x^2 - px - q = 0 \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が、 $x=t$ を重解にもつから、②の左辺は、

$$\begin{aligned} x^2 - px - q &= (x-t)^2 \\ &= x^2 - 2tx + t^2 \end{aligned}$$

と表される。係数を比較して、

$$\begin{cases} -p = -2t \\ -q = t^2 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} p = 2t \\ q = -t^2 \end{cases}$$

を得るから、①に代入して、求める接線の式は、

$$\boxed{y = 2tx - t^2}$$

問4.3

C と l が接するのは、共有点の x 座標を求める x の方程式

$$x^2 = kx - 4$$

$$\therefore x^2 - kx + 4 = 0 \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{3}$$

が重解をもつときである。

解1 $\textcircled{3}$ を平方完成により変形すると、

$$x^2 - 2 \times \frac{k}{2}x + \frac{k^2}{4} = -4 + \frac{k^2}{4}$$

$$\left(x - \frac{k}{2}\right)^2 = -4 + \frac{k^2}{4}$$

となる。よって、 $\textcircled{3}$ が重解をもつのは、

$$-4 + \frac{k^2}{4} = 0$$

$$k^2 = 16, \therefore \boxed{k = 4, -4}$$

のときである。

解2 $\textcircled{3}$ が $x = t$ を重解にもつとすると、左辺は、

$$x^2 - kx + 4 = (x - t)^2$$

$$= x^2 - 2tx + t^2$$

と表される。係数を比較して、

$$\begin{cases} -k = -2t & \cdots \cdots \textcircled{4} \\ 4 = t^2 & \cdots \cdots \textcircled{5} \end{cases}$$

$\textcircled{5}$ より $t = 2, -2$ だから、 $\textcircled{4}$ より得られる $k = 2t$ に代入して、

$$\boxed{k = 4, -4}$$

なお、解1、解2のようにせずとも、 $\textcircled{3}$ の定数項に着目して、 $\textcircled{3}$ が重解をもつとすればそれは $x = 2$ または $x = -2$ であることがわかるから、最初から $\textcircled{3}$ の左辺が

$$\begin{aligned} x^2 - kx + 4 &= \{x - (\pm 2)\}^2 \\ &= (x \mp 2)^2 \\ &= x^2 \mp 4x + 4 \end{aligned}$$

と表されるとしてよい。1次の係数を比較すれば、

$$-k = \mp 4, \therefore \boxed{k = \pm 4}$$

がわかる（以上、すべて複号同順）。

問4.4

求める接線の式を

$$y = mx + n \quad \cdots \cdots \cdots \text{①}$$

とおく。点(1, -3)を通ることから、

$$-3 = m \times 1 + n$$

$$\therefore n = -m - 3$$

であるから、①は、

$$y = mx - m - 3 \quad \cdots \cdots \cdots \text{②}$$

となる。直線②と放物線C: $y = x^2$ が接するので、共有点の x 座標を求める方程式

$$x^2 = mx - m - 3$$

$$x^2 - mx + (m + 3) = 0 \quad \cdots \cdots \cdots \text{③}$$

が重解をもつ。

解1 ③を平方完成により変形すると、

$$x^2 - 2 \times \frac{m}{2}x + \frac{m^2}{4} = -(m + 3) + \frac{m^2}{4}$$

$$\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{4} - m - 3$$

となる。よって、③が重解をもつのは、

$$\frac{m^2}{4} - m - 3 = 0$$

$$\therefore m^2 - 4m - 12 = 0$$

のときである。これを解くと、

$$(m + 2)(m - 6) = 0$$

$$\therefore m = -2, 6$$

となる。

$m = -2$ のとき、③は

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x + 1)^2 = 0$$

となり、確かに重解 $x = -1$ をもつ。これが接点の x 座標であり、 $y = x^2$ に代入して、 y 座標は $y = 1$ である。また、 $m = -2$ を②に代入して、接線の式は $y = -2x - 1$

$m = 6$ のとき、③は

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x - 3)^2 = 0$$

となり、確かに重解 $x = 3$ をもつ。これが

接点の x 座標であり、 $y = x^2$ に代入して、 y 座標は $y = 9$ である。また、 $m = 6$ を②に代入して、接線の式は $y = 6x - 9$
以上より、求める接線の式と接点の座標は、

$y = -2x - 1, \text{ 接点: } (-1, 1)$ $y = 6x - 9, \text{ 接点: } (3, 9)$
--

である。

解2 ③の重解を $x = t$ とおくと、③の左辺は、

$$x^2 - mx + (m + 3) = (x - t)^2 = x^2 - 2tx + t^2$$

と表される。係数を比較して、

$$\begin{cases} -m = -2t & \cdots \cdots \text{④} \\ m + 3 = t^2 & \cdots \cdots \text{⑤} \end{cases}$$

④より、 $t = \frac{m}{2}$ で、これを⑤に代入すれば、

$$m + 3 = \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

$$0 = \frac{m^2}{4} - m - 3$$

$$\therefore m^2 - 4m - 12 = 0$$

を得る。

以下は、解1と同様である。

③の重解を $x = t$ とおくということは、 $x = t$ におけるCの接線を考えるということだから、問4.2の方法で接線の式を作っておく手もある。ここでは、問4.2(2)の結果そのものを利用してみる。

解 3 放物線 $C: y = x^2$ の $x = t$ における接線の式は、問 4.2(2) で求めたように、

$$y = 2tx - t^2 \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{6}$$

である。直線⑥が点 $(1, -3)$ を通るのは、

$$-3 = 2t \times 1 - t^2$$

$$\therefore t^2 - 2t - 3 = 0 \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{7}$$

が成り立つときである。これを解くと、

$$(t+1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = -1, 3$$

となる。これらが接点の x 座標であり、接点が放物線 $y = x^2$ 上の点であることから、 y 座標も求めると、接点が $(-1, 1), (3, 9)$ であると分かる。 $t = -1, 3$ を⑥に代入して接線の式も求め、結局、接線の式と接点の座標は、

$y = -2x - 1, \text{ 接点: } (-1, 1)$
$y = 6x - 9, \text{ 接点: } (3, 9)$

である。