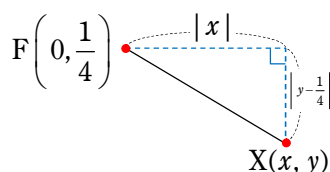


中2数学C 2019年度 夏期講習後期 本問解答

§5 放物線の幾何

※ 欠席してしまった場合は、問 5.1～問 5.3 を（余裕があれば問 5.4 も）自分で確認しておきましょう。

問5.1



2点 $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$, $X(x, y)$ に対し、ピタゴラスの定理より、

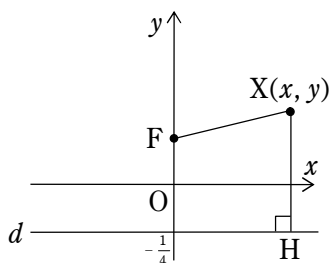
$$FX^2 = |x|^2 + \left|y - \frac{1}{4}\right|^2 = x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2$$

である。（線分 FX が x 軸や y 軸に平行な場合もこれでよいことを確認しよう。）
 X から d に下した垂線の足を H とすると、直線 d から X までの距離は HX である。

ここで、 $H\left(x, -\frac{1}{4}\right)$, $X(x, y)$ より

$$HX^2 = \left|y - \left(-\frac{1}{4}\right)\right|^2 = \left(y + \frac{1}{4}\right)^2$$

である。



よって、 $X(x, y)$ が $FX = HX$, つまり $FX^2 = HX^2$ を満たすのは、 x, y が

$$\begin{aligned} x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 &= \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 \\ x^2 + y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} &= y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} \\ x^2 - y &= 0 \\ \therefore y &= x^2 \end{aligned}$$

を満たすときと分かる。

これは、 X が放物線 $y = x^2$ 上を動くことを意味している。

図形的に考えれば、 $FX = HX$ を満たす点 X には、任意の x 座標をもつものがあるので、 X は放物線 $y = x^2$ 上をくまなく動くことが分かる。

したがって、 X の軌跡は 放物線 $y = x^2$ となる。

※ 同様にして、定点 $F\left(0, \frac{a}{4}\right)$ と定直線

$$d: y = -\frac{a}{4} \text{ からの距離が等しい点の}$$

軌跡が、放物線 $y = \frac{1}{a}x^2$ であることが

わかる。 F を焦点、 d を準線と呼ぶ。

問5.2

P の座標を (p, p^2) とおく ($p \neq 0$)。問 4.2(2) と同様にして、放物線 $C: y = x^2$ の P における接線の式は、

$$y = 2px - p^2 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

である。(ここでは、求める過程は略す。)

(1) Q の x 座標は、 $\textcircled{1}$ に $y = 0$ を代入して、

$$0 = 2px - p^2$$

$$2px = p^2$$

$p \neq 0$ より、

$$x = \frac{p^2}{2p} = \frac{p}{2}$$

よって、Q の座標は $Q\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ であり、

FQ の傾きは、

$$\frac{0 - \frac{1}{4}}{\frac{p}{2} - 0} = -\frac{1}{4} \times \frac{2}{p} = -\frac{1}{2p}$$

となる。したがって、

(PQ の傾き) $\times$ (FQ の傾き)

$$= 2p \times \left(-\frac{1}{2p}\right) = -1$$

であるから、 $PQ \perp FQ$ である。

(2) P から準線 $d: y = -\frac{1}{4}$ に下ろした垂線

の足を H とすると、

$$FP = PH = p^2 - \left(-\frac{1}{4}\right) = p^2 + \frac{1}{4}$$

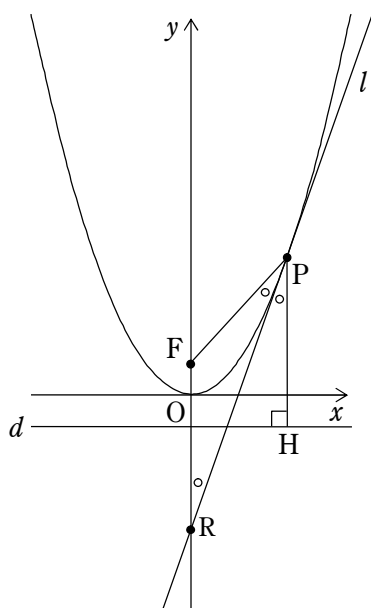
一方、直線 $\textcircled{1}$ の y 切片は $-p^2$ だから、

R の座標は $(0, -p^2)$ であり、

$$FR = \frac{1}{4} - (-p^2) = p^2 + \frac{1}{4}$$

したがって、 $FP = FR$ である。

(1)



PにおけるCの接線を l とする。
 l と y 軸との交点をRとすると、
 $PH//FR$ より、

$$\angle FRP = \angle RPH \text{ (錯角定理)} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

である。一方、問 5.2(2)より、 $FP = FR$ だから、

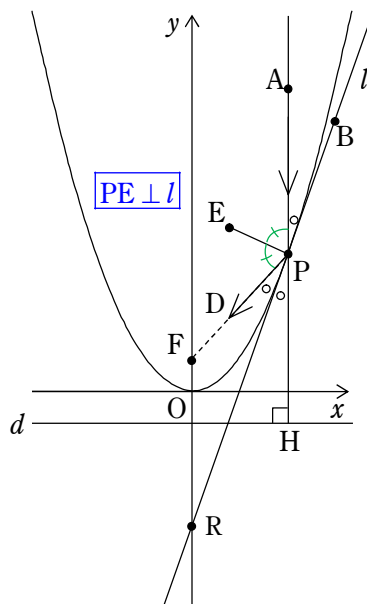
$$\angle FPR = \angle FRP \text{ (底角定理)} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

である。①, ②より、

$$\angle \text{FPR} = \angle \text{RPH}$$

すなわち、接線 l は、 $\angle FPH$ を二等分する。

(2)



y 軸と平行な光線が、上から放物線にあたって P において反射するとする。入射角と反射角（図の $\angle APE$ と $\angle DPE$ ）が等しいので、図において

$$\angle APB = \angle DPR \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

一方、対頂角定理より、

$$\angle APB = \angle HPR \dots\dots\dots ④$$

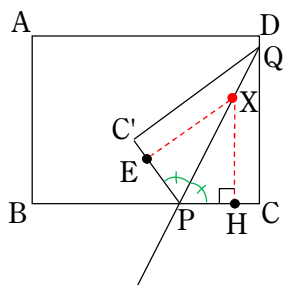
だから、③、④より

$$\angle DPR = \angle HPR$$

すなわち、接線 l は、 $\angle DPH$ を二等分している。したがって、(1) より、直線 PD と PF は一致し、反射光が焦点 F を通ることが分かった。 P は、放物線 C 上の任意の点であるので、 y 軸と平行な光線が、上から放物線にあたって反射するとき、その光線がすべて焦点 F に集まることが示された。

問5.4

折り目をたくさん作ると、それらの境界として放物線（の一部）らしきものが浮かび上がってくる。それが、実際に放物線であることを示そう。E を焦点、BC を準線とする放物線を F とする。



折り目を作ったときにEと重なるBC上の点をHとし、Hを通りBCに垂直な直線と折り目PQとの交点をXとおく。すると、二辺夾角相等で

$$\triangle XEP \equiv \triangle XHP \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

だから、 $EX = HX$ （対応辺）であり、問5.1（焦点と準線の性質）より、 X は放物線 F 上の点である。さらに、 $\textcircled{1}$ より、

$$\angle EXP = \angle HXP \text{（対応角）}$$

だから、折り目 PQ が $\angle EXH$ を二等分することが分かる。したがって、問5.3(1)から、直線 PQ は X における F の接線と一致している。

以上から、折り目たちの境界が放物線 F であることが分かった。