

中2数学C 2019年度 夏期講習後期 宿題解答

§3 放物線と直線

H3.1

(1) 求める B の x 座標を β とおく。

l は傾き 3 の直線なので、その式は、

$$y = 3x + q$$

とおける。したがって、 C と l の交点 A, B の x 座標は、

$$x^2 = 3x + q$$

$$\therefore x^2 - 3x - q = 0 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

の実数解である。よって、①の左辺は、

$$x^2 - 3x - q = (x - 1)(x - \beta) \quad \cdots \cdots \text{②}$$

と因数分解される。②の両辺の x の係数を比較して、

$$-3 = -1 - \beta, \therefore \beta = 2$$

B の y 座標は、 $y = x^2$ に $x = 2$ を代入して、 $y = 2^2 = 4$ だから、B の座標は、

$$\boxed{B(2, 4)}$$

別解 求める B の x 座標を β とおく。

A, B が $C: y = x^2$ 上の点であることから y 座標も求めれば、その座標は、 $A(1, 1), B(\beta, \beta^2)$ となる。すると AB の傾きは、

$$\frac{\beta^2 - 1}{\beta - 1} = \frac{(\beta + 1)(\beta - 1)}{\beta - 1} = \beta + 1$$

であり、これが 3 に等しいことから、

$$\beta + 1 = 3, \therefore \beta = 2$$

したがって、B の座標は、 $\boxed{B(2, 4)}$

(2) 求める B の x 座標を β とおく。

l は傾き $\frac{1}{3}$ の直線なので、その式は、

$$y = \frac{1}{3}x + q$$

とおける。したがって、 C と l の交点

A, B の x 座標は、

$$-x^2 = \frac{1}{3}x + q$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{3}x + q = 0 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

の実数解である。よって、①の左辺は、

$$x^2 + \frac{1}{3}x + q = (x + 2)(x - \beta) \quad \cdots \cdots \text{②}$$

と因数分解される。②の両辺の x の係数を比較して、

$$\frac{1}{3} = 2 - \beta, \therefore \beta = \frac{5}{3}$$

B の y 座標は、 $y = -x^2$ に $x = \frac{5}{3}$ を代入

して、 $y = -\left(\frac{5}{3}\right)^2 = -\frac{25}{9}$ だから、B の

座標は、 $\boxed{B\left(\frac{5}{3}, -\frac{25}{9}\right)}$

別解 求める B の x 座標を β とおく。

A, B が $C: y = -x^2$ 上の点であることから y 座標も求めれば、その座標は、 $A(-2, -4), B(\beta, -\beta^2)$ となる。すると AB の傾きは、

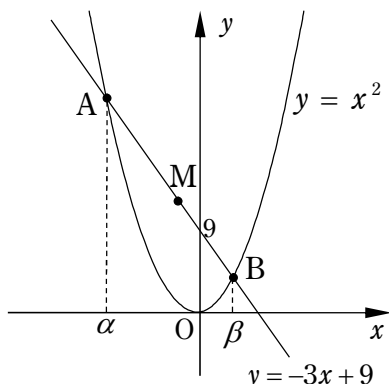
$$\begin{aligned} \frac{-\beta^2 - (-4)}{\beta - (-2)} &= \frac{-(\beta + 2)(\beta - 2)}{\beta + 2} \\ &= -(\beta - 2) \end{aligned}$$

であり、これが $\frac{1}{3}$ に等しいことから、

$$-(\beta - 2) = \frac{1}{3}, \therefore \beta = \frac{5}{3}$$

したがって、B の座標は、 $\boxed{B\left(\frac{5}{3}, -\frac{25}{9}\right)}$

H3.2



放物線 $y = x^2$ と直線 $y = -3x + 9$ は確かに 2 点で交わっている。(直線の y 切片が正であることに着目しよう。)

解 1 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = -3x + 9$ の交点 A, B の x 座標は、

$$x^2 = -3x + 9$$

$$\therefore x^2 + 3x - 9 = 0 \quad \cdots \cdots \cdots \text{①}$$

の実数解である。最初に述べたことから、①は 2 実解をもつ。それら (A, B の x 座標) を α, β とおくと①の左辺は、

$$x^2 + 3x - 9 = (x - \alpha)(x - \beta)$$

と因数分解される。両辺の x の係数を比較して、

$$3 = -(\alpha + \beta), \therefore \alpha + \beta = -3$$

を得る。中点 M の x 座標は、A, B の x 座標の平均で、

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

解 2 ①も作らずに、次のように解決することもできる。

A, B は放物線 $y = x^2$ 上にあるので、その座標を $A(\alpha, \alpha^2), B(\beta, \beta^2)$ ($\alpha < \beta$) とおける。このとき、直線 AB の傾きは

$$\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta - \alpha} = \frac{(\beta + \alpha)(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} = \alpha + \beta$$

となる。これが、直線 $y = -3x + 9$ の傾き -3 と一致するから、 $\alpha + \beta = -3$ である。中点 M の x 座標は、A, B の x 座標の平均で、

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

H3.3

求める直線の式を、

$$y = px + q \quad \cdots \cdots \cdots \text{①}$$

とおく。C: $y = x^2$ との共有点の x 座標は、

$$x^2 = px + q$$

$$\therefore x^2 - px - q = 0 \quad \cdots \cdots \cdots \text{②}$$

の実数解である。直線①と放物線 $y = x^2$ の共有点が、 x 座標が $1 \pm \sqrt{3}$ の 2 点なので、②の左辺は、

$$\begin{aligned} x^2 - px - q &= \{x - (1 + \sqrt{3})\} \{x - (1 - \sqrt{3})\} \\ &= \{(x - 1) - \sqrt{3}\} \{(x - 1) + \sqrt{3}\} \\ &= (x - 1)^2 - (\sqrt{3})^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 - 3 \\ &= x^2 - 2x - 2 \end{aligned}$$

と表される。両辺の x の係数と定数項を比較して、

$$-p = -2, \quad -q = -2$$

$$\therefore p = 2, \quad q = 2$$

以上より、求める直線の式は、

$$\boxed{y = 2x + 2}$$