

中2数学C 2019年度 夏期講習後期 宿題解答

§4 接線と重解条件

H4.1

(1) 求める接線の式を、

$$y = px + q \quad \cdots \cdots \text{①}$$

とおく。放物線 $y = x^2$ との共有点の x 座標は、

$$x^2 = px + q$$

$$\therefore x^2 - px - q = 0 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

の実数解である。直線①と放物線 $y = x^2$ が $x = 3$ で接するので、②の左辺は、

$$\begin{aligned} x^2 - px - q &= (x - 3)^2 \\ &= x^2 - 6x + 9 \end{aligned}$$

と表される。これより、

$$-p = -6, -q = 9$$

$$\therefore p = 6, q = -9$$

であり、求める接線の式は、

$$\boxed{y = 6x - 9}$$

(2) 求める接線の式を、(1)と同様におくと、今度は、直線①と放物線 $y = x^2$ が $x = -1$ で接するので、②の左辺は、

$$\begin{aligned} x^2 - px - q &= (x + 1)^2 \\ &= x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

と表される。これより、

$$-p = 2, -q = 1$$

$$\therefore p = -2, q = -1$$

であり、求める接線の式は、

$$\boxed{y = -2x - 1}$$

H4.2

(1) 直線 $y = -4x + k$ が放物線 $y = x^2$ と接するのは、共有点の x 座標を求める方程式

$$x^2 = -4x + k$$

すなわち、

$$x^2 + 4x - k = 0 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

が重解をもつときである。

解1 ①を平方完成により変形すると、

$$x^2 + 4x + 4 = k + 4$$

$$(x + 2)^2 = k + 4$$

となる。よって、①が重解をもつのは、

$$k + 4 = 0, \therefore \boxed{k = -4}$$

のときである。

解2 ①が $x = t$ を重解にもつとすると、左辺は、

$$x^2 + 4x - k = (x - t)^2$$

$$= x^2 - 2tx + t^2$$

と表される。係数を比較して、

$$\begin{cases} 4 = -2t & \cdots \cdots \text{②} \\ -k = t^2 & \cdots \cdots \text{③} \end{cases}$$

②より $t = -2$ だから、③に代入して、

$$-k = (-2)^2 = 4, \therefore \boxed{k = -4}$$

解3 ①の 1次の係数に着目して、①が重解をもつとすればそれは $x = -2$ であることがわかるから、①の左辺は、

$$x^2 + 4x - k = (x + 2)^2$$

$$= x^2 + 4x + 4$$

と表される。定数項を比較して、

$$\boxed{k = -4}$$

- (2) 直線 $y = ax - 3$ が放物線 $y = x^2$ と接するのは、共有点の x 座標を求める方程式

$$x^2 = ax - 3$$

すなわち、

$$x^2 - ax + 3 = 0 \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が重解をもつときである。

解 1 ①を平方完成により変形すると、

$$x^2 - 2 \times \frac{a}{2}x + \frac{a^2}{4} = -3 + \frac{a^2}{4}$$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{-12 + a^2}{4}$$

となる。よって、①が重解をもつのは、

$$-12 + a^2 = 0, \quad \therefore \boxed{a = 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}}$$

のときである。

解 2 ①が $x = t$ を重解にもつとすると、左辺は、

$$x^2 - ax + 3 = (x - t)^2$$

$$= x^2 - 2tx + t^2$$

と表される。係数を比較して、

$$\begin{cases} -a = -2t & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 3 = t^2 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

③より $t = \sqrt{3}, -\sqrt{3}$ だから、②より得られる $a = 2t$ に代入して、

$$\boxed{a = 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}}$$

解 3 ①の定数項に着目して、①が重解をもつとすればそれは $x = \pm\sqrt{3}$ であることがわかるから、①の左辺は、

$$x^2 - ax + 3 = (x \mp \sqrt{3})^2$$

$$= x^2 \mp 2\sqrt{3}x + 3$$

と表される。 x の項を比較して、

$$\boxed{a = 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}}$$

(以上、すべて複号同順。)

H4.3

求める接線の式を

$$y = mx + n \quad \text{..... ①}$$

とおく。点(1, -8)を通ることから、

$$-8 = m \times 1 + n$$

$$\therefore n = -m - 8$$

であるから、①は、

$$y = mx - m - 8 \quad \text{..... ②}$$

となる。直線②と放物線 $C: y = x^2$ が接するので、共有点の x 座標を求める方程式

$$x^2 = mx - m - 8$$

$$x^2 - mx + (m + 8) = 0 \quad \text{..... ③}$$

が重解をもつ。

解 1 ③を平方完成により変形すると、

$$x^2 - 2 \times \frac{m}{2}x + \frac{m^2}{4} = -(m + 8) + \frac{m^2}{4}$$

$$\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{4} - m - 8$$

となる。よって、③が重解をもつのは、

$$\frac{m^2}{4} - m - 8 = 0$$

$$\therefore m^2 - 4m - 32 = 0$$

のときである。これを解くと、

$$(m + 4)(m - 8) = 0$$

$$\therefore m = -4, 8$$

となるから、③に代入して、求める接線の式は、

$$y = -4x - 4, y = 8x - 16$$

解 2 ③の重解を $x = t$ とおくと、②の左辺は、

$$\begin{aligned} x^2 - mx + (m + 8) &= (x - t)^2 \\ &= x^2 - 2tx + t^2 \end{aligned}$$

と表される。係数を比較して、

$$\begin{cases} -m = -2t & \text{..... ④} \\ m + 8 = t^2 & \text{..... ⑤} \end{cases}$$

④より、 $t = \frac{m}{2}$ で、これを⑤に代入すれば、

$$m + 8 = \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

$$0 = \frac{m^2}{4} - m - 8$$

$$\therefore m^2 - 4m - 32 = 0$$

を得る。

以下は、解 1 と同様である。

③の重解を $x = t$ とおくということは、 $x = t$ における C の接線を考えるということだから、問 4.2 の方法で接線の式を作っておく手もある。ここでは、問 4.2(2)の結果そのものを利用してみる。

解 3 放物線 $C: y = x^2$ の $x = t$ における接線の式は、問 4.2(2)で求めたように、

$$y = 2tx - t^2 \quad \text{..... ⑥}$$

である。直線⑥が点(1, -8)を通るのは、

$$-8 = 2t \times 1 - t^2$$

$$\therefore t^2 - 2t - 8 = 0 \quad \text{..... ⑦}$$

が成り立つときである。これを解くと、

$$(t + 2)(t - 4) = 0$$

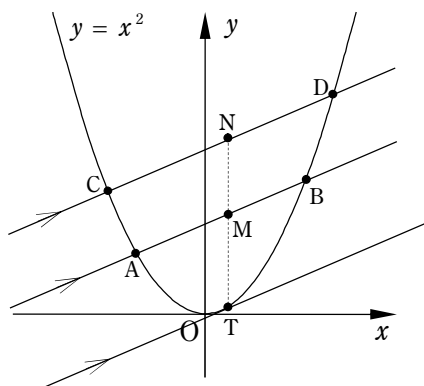
$$\therefore t = -2, 4$$

となる。(これらが接点の x 座標である。)

⑥に代入して、求める接線の式は、

$$y = -4x - 4, y = 8x - 16$$

H4.4



- (1) A, B, C, D は放物線 $y = x^2$ 上にあるので、その座標を

$$A(a, a^2), B(b, b^2), C(c, c^2), D(d, d^2)$$

とおける。 (a, b, c, d) は相異なる実数)

このとき、直線 AB の傾きは、

$$\frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b + a)(b - a)}{b - a} = a + b$$

同様に直線 CD の傾きは $c + d$ である。

AB // CD より、これらの傾きが一致するから、

$$a + b = c + d \dots\dots ①$$

が成り立つ。

A, B の中点を M、C, D の中点を N とする。M, N の x 座標は、それぞれ A, B の x 座標の平均、C, D の x 座標の平均で、

$$\frac{a + b}{2}, \quad \frac{c + d}{2}$$

であるが、①より、これらは一致する。

- (2) 一般に、傾きが p である直線が放物線 $y = x^2$ に接するときの接点の x 座標を p で表してみよう。

直線 $y = px + q$ と放物線 $y = x^2$ との共有点の x 座標を求める x の 2 次方程式

$$x^2 = px + q$$

$$\therefore x^2 - px - q = 0$$

が $x = t$ を重解をもつのは、左辺が

$$x^2 - px - q = (x - t)^2 = x^2 - 2tx + t^2$$

と表されるときである。このとき、

$$-p = -2t, -q = t^2$$

であり、接点の x 座標は

$$t = \frac{p}{2}$$

である。(接線の式は

$$y = px - \frac{p^2}{4}$$

となる。)

これより、放物線 $y = x^2$ の AB と平行な接線 (傾き $a + b$) と放物線 $y = x^2$ の接点 T の x 座標は、

$$\frac{a + b}{2}$$

であり、(1)で求めた x 座標と同じである。