中2数学B 2019年度3学期 本問解答
§5 ${}_nC_k$の利用1

※ 欠席してしまった場合は、問 5.2 ～ 問 5.4 を（余裕があれば問 5.1 も）自分で確認し、p.32～p.33 の宿題 H5.1～H5.3 に取り組んで提出してください。

問5.1

(1) ${}_5P_3=5\times4\times3=\boxed{60}$，${}_5P_5=5!=\boxed{120}$

(2) ${}_5C_3=\dfrac{{}_5P_3}{3!}=\dfrac{5\times4\times3\times2\times1}{3!\times2\times1}=\boxed{\dfrac{5!}{3!\times2!}}$

$=\dfrac{5\times\overset{2}{\cancel{4}}\times\cancel{3}}{\cancel{3}\times\cancel{2}\times1}=\boxed{10}$

${}_5P_3=5\times4\times3=\dfrac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1}=\boxed{\dfrac{5!}{2!}}$

$=\boxed{60}$

(3) ${}_nC_k=\boxed{\dfrac{{}_nP_k}{k!}}$

ここで、

${}_nP_k=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-k+1)$

$=\dfrac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)\times(n-k)!}{(n-k)!}$

$=\dfrac{n!}{(n-k)!}\qquad\cdots①$

だから、

${}_nC_k=\dfrac{{}_nP_k}{k!}=\dfrac{\dfrac{n!}{(n-k)!}}{k!}=\boxed{\dfrac{n!}{k!\times(n-k)!}}$

(4) (3)の議論は（よって結果も）$1\leqq k\leqq n$ のときのみ通用するが、①で形式的に $k=0$ とすると、

${}_nP_0=\dfrac{n!}{(n-0)!}=\dfrac{n!}{n!}=1$

となる。また、(3)の結果で形式的に $k=0$ とすると、

${}_nC_0=\dfrac{n!}{0!\times(n-0)!}=\dfrac{n!}{1\times n!}=1$

となる。したがって、

${}_nP_0=\boxed{1}$，${}_nC_0=\boxed{1}$

と定めるのがよい。

(5)

${}_nC_k$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$n=5$	1	5	10	10	5	1	
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1

(6) ${}_5C_2=\dfrac{{}_5P_2}{2!}=\dfrac{20}{2}=10$，${}_5C_3=\dfrac{{}_5P_3}{3!}=\dfrac{60}{6}=10$

なので、$\boxed{{}_5C_2={}_5C_3}$ が成り立つ。

(7) (3)の結果 ${}_nC_k=\dfrac{n!}{k!\times(n-k)!}$ を利用すれば、

${}_nC_{n-k}=\dfrac{n!}{(n-k)!\times(n-(n-k))!}$

$=\dfrac{n!}{(n-k)!\times k!}$

なので、$\boxed{{}_nC_k={}_nC_{n-k}}$ が成り立つ。

これは、「n 個の異なるものから取り出す k 個を選ぶのと、取り出さずに残す $n-k$ 個を選ぶのが同じこと」ということからも分かる。

問5.2

(1) 球を並べる 6 ヵ所から、赤球を並べる 3 ヵ所を選ぶことと、この 6 個の球を並べる方法と対応し、その総数は一致する。よって、求める総数は、

$$ {}_6C_3 = \frac{\cancel{6}\times 5\times 4}{\cancel{3\times 2}\times 1} = \boxed{20} $$

問 5.1 で作った式に当てはめると

$$ {}_6C_3 = \frac{6!}{3!\times 3!} $$

となり、問 4.3 の考え方で作った式と同じになっていることが確認できる。

(2) 球を並べる 9 ヵ所から、赤球を並べる 2 ヵ所を選び、残った 7 ヵ所から白球を並べる 3 ヵ所を選ぶことと、この 9 個の球を並べる方法とが対応し、その総数は一致する。よって、求める総数は、

$$ {}_9C_2 \times {}_7C_3 = \frac{9\times \overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{2\times 1}} \times \frac{7\times \cancel{6}\times 5}{\cancel{3\times 2\times 1}} \quad \cdots ① $$
$$ = \boxed{1260} $$

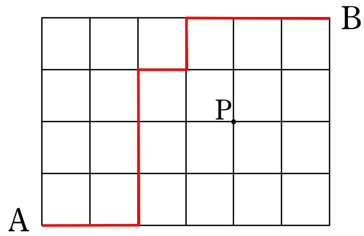
これも、①の後ろに $\frac{4!}{4!}$ を補えば、

$$ \frac{9\times 8}{2!}\times\frac{7\times 6\times 5}{3!}\times\frac{4!}{4!} = \frac{9!}{2!\times 3!\times 4!} $$

となり、問 4.3 の考え方で作った式と同じになっていることが確認できる。

問5.3

(1)



A から B までの最短経路を選ぶことは、4 個の↑（上方向へ 1 区画の移動）と 6 個の→（右方向へ 1 区画の移動）を並べることに対応する。

（例えば、上の経路に対応するのは

→→↑↑↑→↑→→→

である。）

それはまた、10 ヵ所のうち、↑にする 4 ヵ所を選ぶことにも対応するから、求める最短経路の総数は

$$ {}_{10}C_4 = \frac{10\times \overset{3}{\cancel{9}}\times \cancel{8}\times 7}{\cancel{4}\times \cancel{3}\times \cancel{2}\times 1} = \boxed{210} $$

これは確かに、問 2.2(1)の答と一致する。

(2) A から P までの最短経路は、(1)と同様に考え、

$$ {}_6C_2 = \frac{6\times 5}{2\times 1} = 15 \text{ 通り。} $$

その各々について、P から B までの最短経路は、やはり同様に、

$$ {}_4C_2 = \frac{4\times 3}{2\times 1} = 6 \text{ 通り。} $$

よって、求める総数は $15\times 6 = \boxed{90}$ で、これも確かに問 2.2(2)の答と一致する。

問5.4

(1)

○ ○ ○ ｜ ｜　　○ ○ ｜ ○ ｜
○ ○ ｜ ｜ ○　　○ ｜ ○ ○ ｜
○ ｜ ○ ｜ ○　　○ ｜ ｜ ○ ○
｜ ○ ○ ○ ｜　　｜ ○ ○ ｜ ○
｜ ○ ｜ ○ ○　　｜ ｜ ○ ○ ○

の 10 通りであるが、これは○ ｜ を並べる 5 カ所から ｜ の 2 カ所を選ぶ方法の総数 $\boxed{{}_5C_2}$ と一致する。（○の 3 カ所を選ぶ方法の総数 $\boxed{{}_5C_3}$ と答えてもよい。）

(2) (1)の○を飴とみなし、1 本目の ｜ より左側の○が X の分、2 本の ｜ の間の○が Y の分、2 本目の ｜ より右側の○が Z の分と考えると、3 人への飴の分け方と(1)の記号列とが 1 対 1 に対応する。よって、飴の分け方の総数は、(1)と同じく $\boxed{{}_5C_2\ (={}_5C_3)}$ と表せる。

(3) 6つの○と2本の ｜ を並べて記号列を作り、その各々に対して、1 本目の｜より左にある○の数を x、2 本の ｜ の間にある○の数を y、2 本目の ｜ より右にある○の数を z とすると、記号列と

$$x+y+z=6,\quad x\geqq 0, y\geqq 0, z\geqq 0$$

をみたす整数の組 (x, y, z) とが 1 対 1 に対応する。したがって、求める組 (x, y, z) の総数は、6 つの○と 2 本の ｜ の並べ方の総数 (8 カ所中どの 2 カ所を ｜ にするかの場合の数) と一致し、

$${}_8C_2=\frac{8\times 7}{2\times 1}=\boxed{28}$$

(4) リンゴ、みかん、ぶどうジュースの本数を、それぞれ x, y, z とすれば、ジュースの買い方と、

$$x+y+z=6,\quad x\geqq 0, y\geqq 0, z\geqq 0$$

をみたす整数の組 (x, y, z) とが 1 対 1 に対応する。(3)より、その総数は $\boxed{28}$ である。

(5) 先に 3 人に飴を 2 個ずつ配っておき、残りの 6 個の飴を 1 個も貰わない人がいてもよいとして分けることを考える。すると、飴の分け方と、

$$x+y+z=6,\quad x\geqq 0, y\geqq 0, z\geqq 0$$

をみたす整数の組 (x, y, z) とが 1 対 1 に対応する。(3)より、その総数は $\boxed{28}$ である。

(6) $w=7-(x+y+z)$ とおけば、求める整数の組 (x, y, z) の総数は、

$$x+y+z+w=7,$$
$$x\geqq 0, y\geqq 0, z\geqq 0, w\geqq 0$$

をみたす整数の組 (x, y, z, w) の総数と一致する。それはまた、7 つの○と 3 本の ｜ の並べ方の総数とも一致し、

$${}_{7+3}C_3=\frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1}=\boxed{120}$$

(7) $x'=x-1, y'=y-1, z'=z-1$,
$w'=4-(x'+y'+z')$

とおけば、求める整数の組 (x, y, z) の総数は、

$$x'+y'+z'+w'=4,$$
$$x'\geqq 0, y'\geqq 0, z'\geqq 0, w'\geqq 0$$

をみたす整数の組 (x', y', z', w') の総数と一致する。それはまた、4 つの○と 3 本の ｜ の並べ方の総数とも一致し、

$${}_{4+3}C_3=\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}=\boxed{35}$$