中2数学B 2019年度3学期 宿題解答
§3 和・積の法則2

H3.1

方針 A) それほど多くはないので、すべて書き出してしまおう。

(1) $102, 103, 120, 123, 130, 132,$
$201, 203, 210, 213, 230, 231,$
$301, 302, 310, 312, 320, 321$
の $\boxed{18}$ 通り。

(2) (1)のうち、奇数は
$103, 123, 201, 203, 213, 231, 301, 321$
の $\boxed{8}$ 通り。

(3) (1)の 18 通りのうち、奇数が(2)の 8 通りだから、偶数は $18-8=\boxed{10}$ 通り。

(4) (1)のうち、3 の倍数になるものは、各位の数の和が 3 の倍数になるものなので、
$102, 120, 123, 132, 201, 210, 213,$
$231, 312, 321$
の $\boxed{10}$ 通り。

(5) 6 の倍数になるものは、(4)で挙げた 3 の倍数であるもののうち、偶数でもあるものなので、
$102, 120, 132, 210, 312$
の $\boxed{5}$ 通り。

方針 B) 和・積の法則を利用してみよう。

(1) 百の位の数は 0 以外の 3 通り、十の位の数は百の位で使わなかった数なので 3 通り、一の位の数は百の位でも十の位でも使わなかった数なので 2 通り。よって、出来る 3 桁の数は $3\times3\times2=\boxed{18}$ 通り。

(2) 一の位は奇数の 1 か 3 なので 2 通り、百の位の数は 0 でも一の位で使った数でもない数なので 2 通り、十の位の数は一の位でも百の位でも使わなかった数なので 2 通り。よって、出来る 3 桁の奇数は $2\times2\times2=\boxed{8}$ 通り。

(3) (1)の 18 通りのうち、奇数が(2)の 8 通りだから、偶数は $18-8=\boxed{10}$ 通り。

(4) 3 の倍数になるのは、各位の数の和が 3 の倍数のとき。いま、考えている 3 桁の数の各位の数の和は、3 以上 6 以下なので、3 の倍数としてありうるのは 3, 6 のいずれか。
各位の数の和が 3 になるのは、3 数が 0, 1, 2 のときで、これを並べてできる 3 桁の数は
$102, 120, 201, 210$
の $4\,(=2\times2\times1)$ 通り。
各位の数の和が 6 になるのは、3 数が 1, 2, 3 のときで、これを並べてできる 3 桁の数は
$123, 132, 213, 231, 312, 321$
の $6\,(=3\times2\times1)$ 通り。
以上より、3 の倍数は $4+6=\boxed{10}$ 通り。

(5) 6 の倍数になるものは、(4)で挙げた 3 の倍数であるもののうち、偶数でもあるものなので、
$102, 120, 210, 132, 312$
の $\boxed{5}$ 通り。

H3.2

(1) 1 文字目が a, b, c, d のものがそれぞれ
$4\times3\times2\times1=24$ 個
ずつ、計 $24\times4=96$ 個ある。
$eabcd$ は 1 文字目が e の文字列の 1 つ目のものなので、$\boxed{97}$ 番目。

(2) はじめの 2 文字が ea, eb, ec のものがそれぞれ
$3\times2\times1=6$ 個
ずつ、計 $6\times3=18$ 個あるので、はじめの 2 文字が ed であるものは
$96+18+1=115$
番目の $edabc$ からであり、このあと
$edabc, edacb, edbac$
と続くので、$\boxed{117}$ 番目。

H3.3

(1) APQRB, APRQB, AQPRB, AQRPB,
ARPQB, ARQPB,
BPQRA, BPRQA, BQPRA, BQRPA,
BRPQA, BRQPA
の $3!\times 2=\boxed{12}$ 通り。

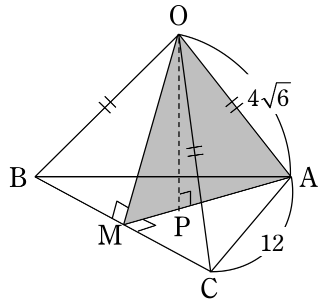
(2) ABPQR, ABPRQ, ABQPR, ABQRP,
ABRPQ, ABRQP,
APQRB, APRQB, AQPRB, AQRPB,
ARPQB, ARQPB,
BAPQR, BAPRQ, BAQPR, BAQRP,
BARPQ, BARQP,
BPQRA, BPRQA, BQPRA, BQRPA,
BRPQA, BRQPA,
PQRAB, PQRBA, PRQAB, PRQBA,
QPRAB, QPRBA, QRPAB, QRPBA,
RPQAB, RPQBA, RQPAB, RQPBA
の $3!\times 3!=\boxed{36}$ 通り。

H3.4

(1) 4,
$3+1, 2+2, 1+3,$
$2+1+1, 1+2+1, 1+1+2,$
$1+1+1+1$
の 8 通りなので、$a_4=\boxed{8}$

(2) 同様にして、
5,
$4+1, 3+2, 2+3, 1+4,$
$3+1+1, 1+3+1, 1+1+3,$
$2+2+1, 2+1+2, 1+2+2,$
$2+1+1+1, 1+2+1+1,$
$1+1+2+1, 1+1+1+2$
$1+1+1+1+1$
の 16 通りなので、$a_5=\boxed{16}$

H3.5 解 1



BC の中点を M とし、O から AM に下した垂線の足を P とする:

$\mathrm{OP}\perp\mathrm{AM}$ ……………………………… ①

ここで、$\mathrm{OM}\nparallel\mathrm{AM}$ で、

$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}, \mathrm{BM}=\mathrm{CM}$ より $\mathrm{OM}\perp\mathrm{BC}$

$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}, \mathrm{BM}=\mathrm{CM}$ より $\mathrm{AM}\perp\mathrm{BC}$

だから、面$\mathrm{OAM}\perp\mathrm{BC}$ であり、したがって、

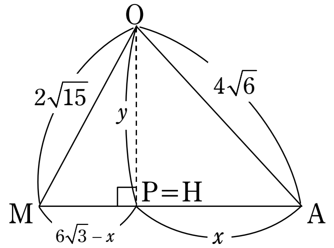
$\mathrm{OP}\perp\mathrm{BC}$ ……………………………… ②

$\mathrm{AM}\nparallel\mathrm{BC}$ なので、①, ②より、$\mathrm{OP}\perp$面ABC であり、P は O から面 ABC に下ろした垂線の足 H と一致する。△ABC は正三角形で、中線 AM は A から BC への垂線と一致するから、△ABM は 30°, 60°, 90° の直角三角形で、

$$\mathrm{AM}=\mathrm{AB}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$

また、△OBM にピタゴラスの定理を用いて、

$$\mathrm{OM}=\sqrt{\mathrm{OB}^2-\mathrm{BM}^2}=\sqrt{\left(4\sqrt{6}\right)^2-6^2}$$
$$=\sqrt{96-36}=2\sqrt{15}$$



$\mathrm{AH}=x$, $\mathrm{OH}=y$ とおき、△OAH, △OMH にピタゴラスの定理を用いると、

$$x^2 + y^2 = \left(4\sqrt{6}\right)^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 96 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

$$\left(6\sqrt{3} - x\right)^2 + y^2 = \left(2\sqrt{15}\right)^2$$

$$\therefore 108 - 12\sqrt{3}\,x + x^2 + y^2 = 60 \quad \cdots\cdots ④$$

③－④より、

$$-108 + 12\sqrt{3}\,x = 96 - 60$$

$$\therefore x = \frac{144}{12\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

③に代入して、

$$y^2 = 96 - \left(4\sqrt{3}\right)^2 = 96 - 48 = 48$$

$$\therefore y = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \ (> 0)$$

(1)　$AH = x = \boxed{4\sqrt{3}}$

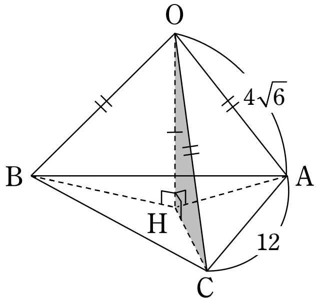
(2)　四面体 OABC の高さは、$OH = y = 4\sqrt{3}$ である。底面は 1 辺の長さ 12 の正三角形なので、面積は

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 12 \times 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$

よって、OABC の体積は

$$\frac{1}{3} \times \triangle ABC \times OH = \frac{1}{3} \times 36\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} = \boxed{144}$$

解 2



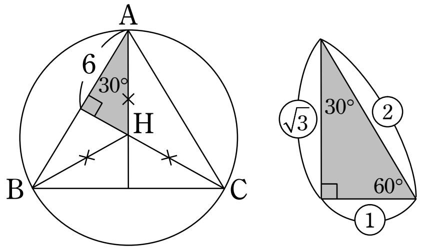
$OA = OB = OC$ なので、O から面 ABC に下した垂線の足は△ABC の外心になる。

（実際、斜辺一辺相等で

$\triangle OAH \equiv \triangle OBH \equiv \triangle OCH$

なので、$AH = BH = CH$（対応辺）である。）

(1)　底面 ABC は、下図のよう。



よって、AH の長さは（図の灰色部分の 30°, 60°, 90° の直角三角形に注目して）

$$AH = \frac{2}{\sqrt{3}} \times 6 = \frac{12}{\sqrt{3}} = \boxed{4\sqrt{3}}$$

(2)　(1)より、四面体 OABC の高さ OH は、△OAH にピタゴラスの定理を用いて

$$OA^2 = OH^2 + AH^2$$

$$OH^2 = OA^2 - AH^2 = \left(4\sqrt{6}\right)^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2 = 48$$

$$\therefore OH = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \ (> 0)$$

底面は 1 辺の長さ 12 の正三角形なので、面積は

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 12 \times 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$

よって、OABC の体積は

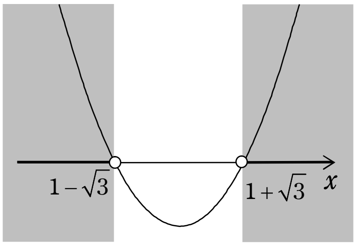
$$\frac{1}{3} \times \triangle ABC \times OH = \frac{1}{3} \times 36\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} = \boxed{144}$$

H3.6

(1) $$x^2-2x-2>0 \quad \cdots\cdots ①$$

の解は、$y=x^2-2x-2$ のグラフで y 座標が正となるような x の範囲である。グラフの x 切片を求めると、

$$x^2-2x-2=0$$
$$x^2-2x+1=2+1$$
$$(x-1)^2=3$$
$$x-1=\pm\sqrt{3}$$
$$\therefore x=1\pm\sqrt{3}$$



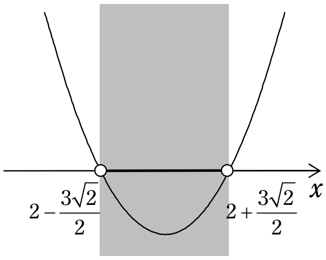
よって、図より、①の解は

$$\boxed{x<1-\sqrt{3},\quad 1+\sqrt{3}<x}$$

(2) $$2x^2-8x-1<0 \quad \cdots\cdots ①$$

の解は、$y=2x^2-8x-1$ のグラフで y 座標が負となるような x の範囲である。グラフの x 切片を求めると、

$$2x^2-8x-1=0$$
$$2(x^2-4x)=1$$
$$x^2-4x+4=\frac{1}{2}+4$$
$$(x-2)^2=\frac{9}{2}$$
$$x-2=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$$
$$\therefore x=2\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$$



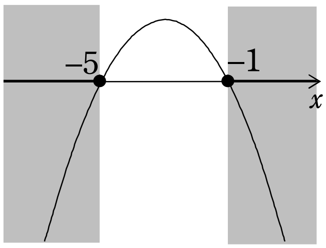
よって、図より、①の解は

$$\boxed{2-\frac{3\sqrt{2}}{2}<x<2+\frac{3\sqrt{2}}{2}}$$

(3) $$-x^2-6x-5\leqq 0 \quad \cdots\cdots ①$$

の解は、$y=-x^2-6x-5$ のグラフで y 座標が 0 以下となるような x の範囲である。グラフの x 切片を求めると、

$$-x^2-6x-5=0$$
$$x^2+6x+5=0$$
$$(x+5)(x+1)=0$$
$$\therefore x=-5,\ -1$$



よって、図より、①の解は

$$\boxed{x\leqq -5,\quad -1\leqq x}$$