

中2数学B 2019年度3学期 宿題解答

§5 ${}_nC_k$ の利用1

H5.1

- (1) 問題の各整数の組 (x, y, z, w) が 10 個の ○ と 3 本の | を並べてできる記号列と 1 対 1 に対応するので、その総数は

$${}_{10+3}C_3 = \frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2 \times 1} = \boxed{286}$$

- (2) **解1**

$$x' = x - 1, y' = y - 1, z' = z - 1, \\ w' = w - 1$$

とおけば、求める自然数の組 (x, y, z, w) の総数は、

$$x' + y' + z' + w' = 6$$

をみたす負でない整数の組 (x', y', z', w') の総数と一致する。それはまた、6 個の ○ と 3 本の | 並べ方の総数とも一致し、

$${}_{6+3}C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = \boxed{84}$$

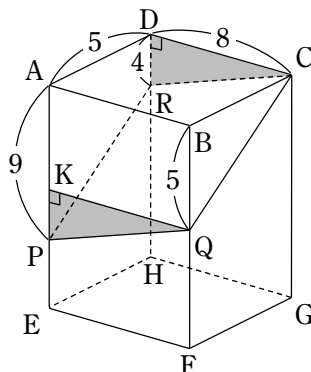
解2

10 個の ○ を先に並べ、その 9 カ所の隙間から 3 カ所を選んで | を入れることで記号列を作る。すると、このようにしてできた記号列と問題の自然数の組 (x, y, z, w) とが 1 対 1 に対応する。したがって、求める総数は

$${}_9C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = \boxed{84}$$

H5.2

切断面 PQCR は平行四辺形である。



- (1) Q から AP に下した垂線の足を K とすると、 $\triangle CDR \equiv \triangle QKP$ (斜辺一辺相等) となるので、

$$PK = RD = 4$$

$$\therefore BQ = AK = AP - PK = 9 - 4 = \boxed{5}$$

- (2) $\angle CDR = 90^\circ$ だから、ピタゴラスの定理より

$$CR = \sqrt{CD^2 + DR^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$$

$\angle CBQ = 90^\circ$, $BC = BQ$ だから、

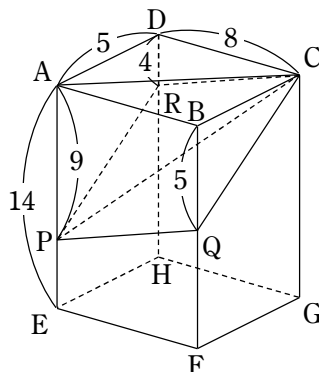
$$CQ = \sqrt{2} BC = 5\sqrt{2}$$

よって、周の長さは

$$CR + CQ + PQ + PR$$

$$= 2(CR + CQ)$$

$$= 2(4\sqrt{5} + 5\sqrt{2}) = \boxed{8\sqrt{5} + 10\sqrt{2}}$$



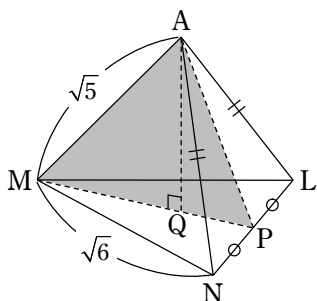
(3) (1)(2)より、三角錐 A-LMN の辺は

$$AL = AM = AN = \sqrt{5} \dots\dots\dots ①$$

$$LM = MN = NL = \sqrt{6} \dots\dots\dots ②$$

を満たす。△LMN を底面としてこの四面体の体積を計算する。

方針 1



NL の中点を P とすると、①、②より、

$$AP \perp NL, MP \perp NL$$

だから、

$$\text{面}APM \perp NL$$

となる。したがって、A から MP に下した垂線の足を Q とすると、

$$AQ \perp MP, AQ \perp NL$$

であるから、

$$AQ \perp \text{面}LMN$$

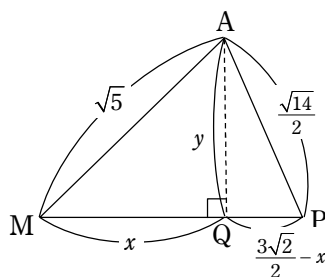
となる。高さ AQ を求めよう。

②より、△LMN は正三角形だから、

$$MP = MN \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

また、∠APN = 90° だからピタゴラスの定理より

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{AN^2 - NP^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{5 - \frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{14}}{2} \end{aligned}$$



$MQ = x$, $AQ = y$ とおき、△AMQ, △APQ にピタゴラスの定理を用いると、

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2 \dots\dots\dots ③$$

$$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - x\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2$$

$$\therefore \frac{9}{2} - 3\sqrt{2}x + x^2 + y^2 = \frac{7}{2} \dots\dots\dots ④$$

③-④より、

$$-\frac{9}{2} + 3\sqrt{2}x = \frac{3}{2}$$

$$\therefore x = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

③に代入して、

$$y^2 = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2 = 5 - 2 = 3$$

$$\therefore y = \sqrt{3} (> 0)$$

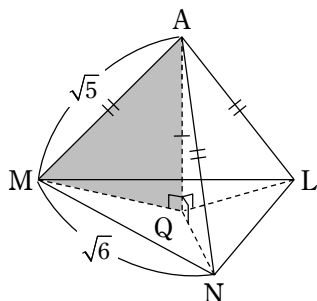
1 辺の長さが $\sqrt{6}$ の正三角形 LMN の面積

$$\text{は } \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ なの で、}$$

A-LMN の体積は

$$\frac{1}{3} \times \triangle LMN \times AQ = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

方針 2



A から $\triangle LMN$ に下した垂線の足を Q とすると、①より、

$$\triangle AQL \equiv \triangle AQM \equiv \triangle AQN$$

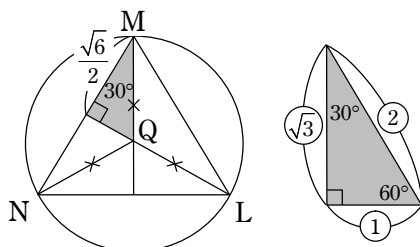
(斜辺一辺相等)

なので、Q は

$$QL = QM = QN$$

を満たす点 ($\triangle LMN$ の外心) であることが分かる。

②より、 $\triangle LMN$ は正三角形なので、次の図より



$$QM = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{2}$$

よって、 $\triangle AQM$ にピタゴラスの定理を用いて

$$\begin{aligned} AQ &= \sqrt{AM^2 - QM^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

1 辺の長さが $\sqrt{6}$ の正三角形 LMN の面積

は $\frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{6} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ なので、

A-LMN の体積は

$$\frac{1}{3} \times \triangle LMN \times AQ = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \boxed{\frac{3}{2}}$$