

中2数学B 2019年度3学期 宿題解答

§6 重複は引こう

H6.1

100 以下の自然数のうち、

3 で割り切れるものは 33 個

7 で割り切れるものは 14 個

あり、この両方に数えられている 21 の倍数は 4 個あるので、3 または 7 で割り切れるものは

$$33 + 14 - 4 = 43 \text{ 個}$$

したがって、3 でも 7 でも割り切れないものは、

$$100 - 43 = \boxed{57} \text{ 個。}$$

H6.2

- (1) 8 文字中 A にする 2 か所を選び、残り 6 文字中 O にする 2 か所を選び、残り 4 文字中 M にする 3 か所を選び、残りの 1 か所に Y を置くことで、文字列を作れるので、全部で

$${}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_3 \times 1 = 28 \times 15 \times 4 \\ = \boxed{1680} \text{ 通り。}$$

- (2) 「OY」を含む文字列

A, A, M, M, M, O, OY

の 7 つを並べ替えてできる文字列の総数なので、A にする 2 か所を選んでから、M にする 3 か所を選び、残りの 2 か所に O, OY を並べることで文字列を作ると考えて、全部で

$${}_7C_2 \times {}_5C_3 \times 2! = 21 \times 10 \times 2 \\ = 420 \text{ 通り。}$$

「YO」を含む文字列

同様に 420 通り。

共通して数えられているものは、

「OYO」を含む文字列

A, A, M, M, M, OYO

の 6 つを並べ替えてできる文字列の総数である。それらは、A にする 2 か所を選んでから、M にする 3 か所を選び、残り 1 か所に OYO を並べることで文字列を作ると考えて、全部で

$${}_6C_2 \times {}_4C_3 \times 1 = 15 \times 4 = 60 \text{ 通り。}$$

したがって、O と Y が隣り合うものは

$$420 + 420 - 60 = \boxed{780} \text{ 通り。}$$

H6.3

目の出方（出た目の並べ方）は、全部で $6^3 = 216$ 個。

- (1) 出た目の積が 5 の倍数とならないのは、5 の目が出ない場合なので、

$$5^3 = \boxed{125} \text{ 通り。}$$

- (2) 出た目の積が 5 の倍数となるのは、(1) より、

$$216 - 125 = \boxed{91} \text{ 通り。}$$

- (3) 出た目の積が 3 の倍数となるのは、大、中、小のサイコロのうち少なくとも 1 つ 3 の倍数の目(3 か 6)が出ているときである。3 の倍数の目が出ない場合は、

$$4^3 = 64 \text{ 通り。}$$

したがって、積が 3 の倍数となる場合は、

$$216 - 64 = \boxed{152} \text{ 通り。}$$

(4)

		全て1,2,4,5	積が3の倍数	
全て 1,2, 3,4,6	全て1,2,4	27	125-27 =98	125
積が 5の倍数	64-27 =37		積が 15の倍数	91
		64	152	
				計 216

出た目の積が 3 の倍数にも 5 の倍数にもならない、つまり、すべて 1, 2, 4 のいずれかとなるような出た目の並べ方は、

$$3^3 = 27 \text{ 通り。}$$

これと(1)~(3)より、上のようなカルノー図ができる。したがって、積が 15 の倍数となるような出た目の並べ方は、

$$216 - (27 + 98 + 37) = 216 - 162 = \boxed{54} \text{ 通り。}$$

H6.4

- (1) $6 \times 5 \times 4 = \boxed{120}$ 通り。

- (2) サイコロの目の出方 $6 \times 6 \times 6 = 216$ 通りのうち、目の積が奇数になるもの（すべてのサイコロの目が奇数のもの）は $3 \times 3 \times 3 = 27$ 通りなので、目の積が偶数になるものは、

$$216 - 27 = \boxed{189} \text{ 通り。}$$

- (3) 目の積が奇数になるのは、すべてのサイコロの目が奇数のときなので、

$$3 \times 2 \times 1 = \boxed{6} \text{ 通り。}$$

- (4) すべての目が異なるもの 120 個のうち、目の積が奇数のものが 6 個あるので、

$$120 - 6 = \boxed{114} \text{ 通り。}$$

- (5) (1), (2), (4)より、

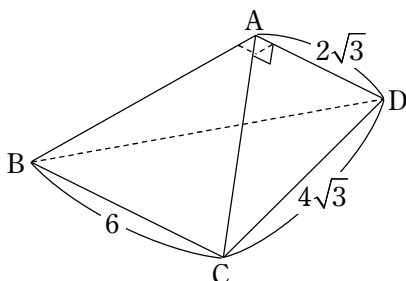
$$120 + 189 - 114 = \boxed{195} \text{ 通り。}$$

		全て異なる	
全て 奇数	6	$27-6$ $=21$	27
積が 偶数	114	$189-114$ $=75$	189
		120	
計 216			

H6.5

$$(1) \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} = \boxed{9\sqrt{3}}$$

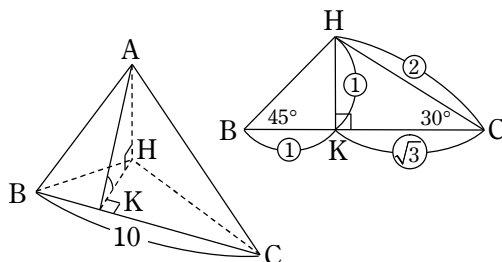
- (2) $CD:DA:AC = 4\sqrt{3}:2\sqrt{3}:6 = 2:1:\sqrt{3}$
 なので、 $\triangle CDA$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三
 角形である。よって、 $\angle DAC = \boxed{90^\circ}$



- (3) $\triangle BDA \equiv \triangle CDA$ (三辺相等) より、
 $\angle DAB = \angle DAC = 90^\circ$
 なので、 DA は面 ABC と垂直。
 したがって、四角錐 $D-ABC$ の体積は
 $\frac{1}{3} \times \triangle ABC \times DA = \frac{1}{3} \times 9\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = \boxed{18}$

H6.6

- (1) H から BC に下した垂線の足を K とする。
 $HK \perp BC$ ①
 すると、下図右のようになっており、



$$HK = \frac{1}{\sqrt{3}+1} \times BC$$

$$= \frac{10}{\underbrace{(\sqrt{3}+1) \times (\sqrt{3}-1)}_{3-1=2}} = 5(\sqrt{3}-1)$$

よって、

$$\triangle HBC = \frac{1}{2} \times BC \times HK$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 5(\sqrt{3}-1) = \boxed{25(\sqrt{3}-1)}$$

- (2) $AH \perp$ 面 HBC より、
 $AH \perp BC$ ②

$HK \nparallel AH$ なので、①、②より、

$BC \perp$ 面 AHK

したがって、

$AK \perp BC$ ③

①、③より、 $\angle AKH$ は面 ABC と面 HBC のなす二面角である。

よって、 $\angle AKH = 60^\circ$ であり、 $\triangle AKH$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形であるから、

$$AK = 2HK = 2 \times 5(\sqrt{3}-1)$$

したがって、

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AK$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 10(\sqrt{3}-1)$$

$$= \boxed{50(\sqrt{3}-1)}$$