中2数学C 2019年度3学期 場合の数 本問解答
§4 場合の数と割り算

※ 欠席してしまった場合は、問 4.2～問 4.4 を自分で確認し、p.24～p.25 の宿題 H4.1～H4.4 に取り組んで提出してください。

問4.1

(1) $\{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\},$
$\{b,c\}, \{b,d\},$
$\{c,d\}$
の $\boxed{6}$ 通り。

(2) $ab,\ ac,\ ad,$
$ba,\ bc,\ bd,$
$ca,\ cb,\ cd,$
$da,\ db,\ dc$
の $4\times 3=\boxed{12}$ 通り。

(3) (1)の 2 文字の選び方の各々について、その 2 文字を並べる方法が 2 通りずつある。したがって、

$\boxed{\text{(2)の2文字の並べ方の総数は、(1)の2文字の選び方の総数の2倍}}$

である。

選び方と並べ方の対応（1:2!）

$\{a,b\}:ab,ba$
$\{a,c\}:ac,ca$
$\{a,d\}:ad,da$
$\{b,c\}:bc,cb$
$\{b,d\}:bd,db$
$\{c,d\}:cd,dc$

問4.2

(1) $\{a,b,c\},\ \{a,b,d\},\ \{a,b,e\},$
$\{a,c,d\},\ \{a,c,e\},\ \{a,d,e\},$
$\{b,c,d\},\ \{b,c,e\},\ \{b,d,e\},\ \{c,d,e\}$
の $\boxed{10}$ 通り。

(2) (1)の総数を N とする。
3 文字の選び方の各々について、その 3 文字を並べる方法が、$3!$ 通りずつあるから、a,b,c,d,e の 5 文字から 3 文字を選んで並べる方法の総数は、

$N\times 3!$

と表せる。一方、この総数は、直接

$5\times 4\times 3$

とも計算できるから、

$N\times 3!=5\times 4\times 3$

が成り立つ。これより、(1)の総数は、

$$N=\frac{5\times 4\times 3}{3!}=\frac{5\times 4\times 3}{3\times 2\times 1}\ (=10)$$

と計算することができる。

選び方と並べ方の対応（1:3!）

$\{a,b,c\}:abc,acb,bac,bca,cab,cba$
$\{a,b,d\}:abd,adb,bad,bda,dab,dba$
$\vdots$
$\{c,d,e\}:cde,ced,dce,dec,ecd,edc$

問4.3

(1) ●●●○
●●○●
●○●●
○●●●
の $\boxed{4}$ 通り。

(2) 以下のように、(1)の並べ方の各々について、赤球の 1, 2, 3 の並べ方 $3!=6$ 通りずつが対応する：

❶❷❸④, ❶❸❷④, ❷❶❸④,
❷❸❶④, ❸❶❷④, ❸❷❶④,

❶❷④❸, ❶❸④❷, ❷❶④❸,
❷❸④❶, ❸❶④❷, ❸❷④❶,

❶④❷❸, ❶④❸❷, ❷④❶❸,
❷④❸❶, ❸④❶❷, ❸④❷❶,

④❶❷❸, ④❶❸❷, ④❷❶❸,
④❷❸❶, ④❸❶❷, ④❸❷❶

これらは全部で $4\times3!=\boxed{24}$ 通りある。

(3) (2)の総数 24 は、単に 1, 2, 3, 4 の並べ方の総数でもある:

1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432,
2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431,
3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421,
4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321

これは、直接 $4!=24$ 通りと計算できる。一方、(2)でみたように、(1)の並べ方の総数に $3!=6$ を掛けたものが(2)の並べ方の総数でもある。したがって、(1)の同じ色の球を区別しない場合の球の並べ方の総数は、

$$\frac{4!}{3!}=\frac{24}{6}=4$$

と計算することが出来る。

(4) 同色の球も❶, ❷, ❸, ④, ⑤のように区別した場合、球の並べ方の総数は $5!$ 通りである。一方、同色の球を区別しない場合の並べ方の各々について、同色の球を区別した場合の $3!\times2!$ 通りずつが対応するから、求める場合の数は、

$$\frac{5!}{3!\times2!}=\frac{5\times\overset{2}{\cancel{4}}\times\cancel{3\times2\times1}}{\cancel{3\times2\times1}\times\cancel{2\times1}}$$
$$=\boxed{10}\text{ 通り。}$$

同色の球を区別しないときと区別したときの対応（$1:3!\times2!$）

●●●○○:
❶❷❸④⑤, ❶❸❷④⑤,
❷❶❸④⑤, ❷❸❶④⑤,
❸❶❷④⑤, ❸❷❶④⑤,
❶❷❸⑤④, ❶❸❷⑤④,
❷❶❸⑤④, ❷❸❶⑤④,
❸❶❷⑤④, ❸❷❶⑤④

●●○●○:
❶❷④❸⑤, ❶❸④❷⑤,
❷❶④❸⑤, ❷❸④❶⑤,
❸❶④❷⑤, ❸❷④❶⑤,
❶❷⑤❸④, ❶❸⑤❷④,
❷❶⑤❸④, ❷❸⑤❶④,
❸❶⑤❷④, ❸❷⑤❶④

⋮

○○●●●:
④⑤❶❷❸, ④⑤❶❸❷,
④⑤❷❶❸, ④⑤❷❸❶,
④⑤❸❶❷, ④⑤❸❷❶,
⑤④❶❷❸, ⑤④❶❸❷,
⑤④❷❶❸, ⑤④❷❸❶,
⑤④❸❶❷, ⑤④❸❷❶

問4.4

(1) 9 人から松組に入る 3 人の選び方が（問 4.1, 問 4.2 と同様に考えて）、

$$\frac{9\times8\times7}{3!}=\frac{\overset{3}{\cancel{9}}\times\overset{4}{\cancel{8}}\times7}{\cancel{3}\times\cancel{2}\times1}=84 \text{通り。}$$

その各々について、残った 6 人から竹組に入る 3 人の選び方が、

$$\frac{6\times5\times4}{3!}=\frac{\cancel{6}\times5\times4}{\cancel{3\times2\times1}}=20 \text{通り。}$$

その各々について、残った 3 人が梅組に入ることになるので、求める 9 人の分け方の総数は、

$$84\times20=\boxed{1680} \text{通り。}$$

(2) ここで考える 9 人の分け方の総数を N とする。

3 つの組を区別しない場合の 9 人の分け方の各々について、できた 3 つの組に松組、竹組、梅組と名前をつける方法が $3!$ 通りずつあるから、9 人を 3 人ずつ松組、竹組、梅組に分ける方法の総数は、

$$N\times3!$$

と表せる。一方、この総数は、(1)より 1680 であるから、

$$N\times3!=1680$$

$$\therefore N=\frac{1680}{3!}=\boxed{280}$$

である。

組を区別しないときと区別したときの対応（$1:3!$）の例

$\{A,B,C\},\{D,E,F\},\{G,H,I\}:$

松,	竹,	梅
松,	梅,	竹
竹,	松,	梅
竹,	梅,	松
梅,	松,	竹
梅,	竹,	松