中2数学C 2019年度3学期 本問解答
§5 ${}_nC_k$ の利用1

※ 欠席してしまった場合は、問 5.2 ～ 問 5.4 を（余裕があれば問 5.1 も）自分で確認し、p.30～p.31 の宿題 H5.1～H5.4 に取り組んで提出してください。

問5.1

(1) ${}_5P_3 = 5\times4\times3 = \boxed{60}$，${}_5P_5 = 5! = \boxed{120}$

(2) ${}_5C_3 = \dfrac{{}_5P_3}{3!} = \dfrac{5\times4\times3\times2\times1}{3!\times2\times1} = \boxed{\dfrac{5!}{3!\times2!}}$

$= \dfrac{5\times\cancel{{}^{2}4}\times3}{\cancel{3}\times\cancel{2}\times1} = \boxed{10}$

${}_5P_3 = 5\times4\times3 = \dfrac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1} = \boxed{\dfrac{5!}{2!}}$

$= \boxed{60}$

(3) ${}_nC_k = \boxed{\dfrac{{}_nP_k}{k!}}$

ここで、

${}_nP_k = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-k+1)$

$= \dfrac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)\times(n-k)!}{(n-k)!}$

$= \dfrac{n!}{(n-k)!}$ …①

だから、

${}_nC_k = \dfrac{{}_nP_k}{k!} = \dfrac{\dfrac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \boxed{\dfrac{n!}{k!\times(n-k)!}}$

(4) (3)の議論は（よって結果も）$1 \leqq k \leqq n$ のときのみ通用するが、①で形式的に $k=0$ とすると、

${}_nP_0 = \dfrac{n!}{(n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$

となる。また、(3)の結果で形式的に $k=0$ とすると、

${}_nC_0 = \dfrac{n!}{0!\times(n-0)!} = \dfrac{n!}{1\times n!} = 1$

となる。したがって、

${}_nP_0 = \boxed{1}$，${}_nC_0 = \boxed{1}$

と定めるのがよい。

(5)

${}_nC_k$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$n=5$	1	5	10	10	5	1	
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1

(6) ${}_5C_2 = \dfrac{{}_5P_2}{2!} = \dfrac{20}{2} = 10$，${}_5C_3 = \dfrac{{}_5P_3}{3!} = \dfrac{60}{6} = 10$

なので、$\boxed{{}_5C_2 = {}_5C_3}$ が成り立つ。

(7) (3)の結果 ${}_nC_k = \dfrac{n!}{k!\times(n-k)!}$ を利用すれば、

${}_nC_{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\times(n-(n-k))!}$

$= \dfrac{n!}{(n-k)!\times k!}$

なので、$\boxed{{}_nC_k = {}_nC_{n-k}}$ が成り立つ。

これは、「n 個の異なるものから取り出す k 個を選ぶのと、取り出さずに残す $n-k$ 個を選ぶのが同じこと」ということからも分かる。

問5.2

(1) 球を並べる 6 ヵ所から、赤球を並べる 3 ヵ所を選ぶことと、この 6 個の球を並べる方法と対応し、その総数は一致する。よって、求める総数は、

$$ {}_6\mathrm{C}_3 = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = \boxed{20} $$

問 5.1 で作った式に当てはめると

$$ {}_6\mathrm{C}_3 = \frac{6!}{3!\times3!} $$

となり、問 4.3 の考え方で作った式と同じになっていることが確認できる。

(2) 球を並べる 9 ヵ所から、赤球を並べる 2 ヵ所を選び、残った 7 ヵ所から白球を並べる 3 ヵ所を選ぶことと、この 9 個の球を並べる方法とが対応し、その総数は一致する。よって、求める総数は、

$$ {}_9\mathrm{C}_2\times{}_7\mathrm{C}_3 = \frac{9\times8}{2\times1}\times\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} \quad \cdots ① $$
$$ = \boxed{1260} $$

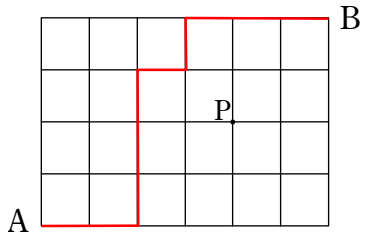
これも、①の後ろに $\frac{4!}{4!}$ を補えば、

$$ \frac{9\times8}{2!}\times\frac{7\times6\times5}{3!}\times\frac{4!}{4!} = \frac{9!}{2!\times3!\times4!} $$

となり、問 4.3 の考え方で作った式と同じになっていることが確認できる。

問5.3

(1)



A から B までの最短経路を選ぶことは、4 個の↑（上方向へ 1 区画の移動）と 6 個の→（右方向へ 1 区画の移動）を並べることに対応する。

（例えば、上の経路に対応するのは

→→↑↑↑→↑→→→

である。）

それはまた、10 ヵ所のうち、↑にする 4 ヵ所を選ぶことにも対応するから、求める最短経路の総数は

$$ {}_{10}\mathrm{C}_4 = \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1} = \boxed{210} $$

これは確かに、問 2.2(1)の答と一致する。

(2) A から P までの最短経路は、(1)と同様に考え、

$$ {}_6\mathrm{C}_2 = \frac{6\times5}{2\times1} = 15 \text{ 通り。} $$

その各々について、P から B までの最短経路は、やはり同様に、

$$ {}_4\mathrm{C}_2 = \frac{4\times3}{2\times1} = 6 \text{ 通り。} $$

よって、求める総数は $15\times6 = \boxed{90}$ で、これも確かに問 2.2(2)の答と一致する。

問5.4

(1)

○ ○ ○ | |　　○ ○ | ○ |
○ ○ | | ○　　○ | ○ ○ |
○ | ○ | ○　　○ | | ○ ○
| ○ ○ ○ |　　| ○ ○ | ○
| ○ | ○ ○　　| | ○ ○ ○

の 10 通りであるが、これは○ | を並べる 5 カ所から | の 2 カ所を選ぶ方法の総数 $\boxed{{}_5\mathrm{C}_2}$ と一致する。（○の 3 カ所を選ぶ方法の総数 $\boxed{{}_5\mathrm{C}_3}$ と答えてもよい。）

(2) (1)の○を飴とみなし、1 本目の ｜ より左側の○が X の分、2 本の | の間の○が Y の分、2 本目の ｜ より右側の○が Z の分と考えると、3 人への飴の分け方と(1)の記号列とが 1 対 1 に対応する。
よって、飴の分け方の総数は、(1)と同じく $\boxed{{}_5\mathrm{C}_2\ (={}_5\mathrm{C}_3)}$ と表せる。

(3) 6つの○と2本の | を並べて記号列を作り、その各々に対して、1 本目の|より左にある○の数を x、2 本の | の間にある○の数を y、2 本目の | より右にある○の数を z とすると、記号列と

$$x+y+z=6,\quad x\geqq 0, y\geqq 0, z\geqq 0$$

をみたす整数の組 (x, y, z) とが1対1に対応する。したがって、求める組 (x, y, z) の総数は、6 つの○と 2 本の | の並べ方の総数（8 カ所中どの 2 カ所を | にするかの場合の数）と一致し、

$${}_8\mathrm{C}_2=\frac{8\times 7}{2\times 1}=\boxed{28}$$

(4) リンゴ、みかん、ぶどうジュースの本数を、それぞれ x, y, z とすれば、ジュースの買い方と、

$$x+y+z=6,\quad x\geqq 0, y\geqq 0, z\geqq 0$$

をみたす整数の組 (x, y, z) とが1対1に対応する。(3)より、その総数は $\boxed{28}$ である。

(5) 先に 3 人に飴を 2 個ずつ配っておき、残りの 6 個の飴を 1 個も貰わない人がいてもよいとして分けることを考える。すると、飴の分け方と、

$$x+y+z=6,\quad x\geqq 0, y\geqq 0, z\geqq 0$$

をみたす整数の組 (x, y, z) とが1対1に対応する。(3)より、その総数は $\boxed{28}$ である。

(6) $w=7-(x+y+z)$ とおけば、求める整数の組 (x, y, z) の総数は、

$$x+y+z+w=7,$$
$$x\geqq 0, y\geqq 0, z\geqq 0, w\geqq 0$$

をみたす整数の組 (x, y, z, w) の総数と一致する。それはまた、7 つの○と 3 本の | の並べ方の総数とも一致し、

$${}_{7+3}\mathrm{C}_3=\frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1}=\boxed{120}$$

(7)

$$x'=x-1, y'=y-1, z'=z-1,$$
$$w'=4-(x'+y'+z')$$

とおけば、求める整数の組 (x, y, z) の総数は、

$$x'+y'+z'+w'=4,$$
$$x'\geqq 0, y'\geqq 0, z'\geqq 0, w'\geqq 0$$

をみたす整数の組 (x', y', z', w') の総数と一致する。それはまた、4 つの○と 3 本の ｜ の並べ方の総数とも一致し、

$${}_{4+3}\mathrm{C}_3=\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}=\boxed{35}$$