

中2数学C 2019年度3学期 本問解答

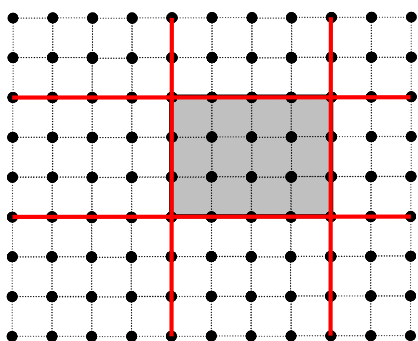
§7 ${}_nC_k$ の利用2

※ 欠席してしまった場合は、問 7.1, 問 7.3 を自分で確認してください。余裕があれば全問解きましょう。

問7.1

長方形を定めること、水平方向の平行線から 2 本、鉛直方向の平行線から 2 本選ぶことが対応するので、求める長方形の総数は、

$${}_9C_2 \times {}_{11}C_2 = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} \times \frac{11 \times 10}{2 \times 1} \\ = 36 \times 55 = \boxed{1980}$$



問7.2

(1)

${}_nC_k$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$n=2$	1	2	1	—	—	—	—	—	—
$n=3$	1	3	3	1	—	—	—	—	—
$n=4$	1	4	6	4	1	—	—	—	—
$n=5$	1	5	10	10	5	1	—	—	—
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1	—	—
$n=7$	1	7	21	35	35	21	7	1	—
$n=8$	1	8	28	56	70	56	28	8	1

(2)(3) さまざまな規則性を発見できる。例えば、

- 各行を見ると、横に並ぶ数字の列は左右対称になる： ${}_nC_k = {}_nC_{n-k}$
これは問 5.1 (7) で証明済みである。

- 各行の和が 2 のべき乗数になっている：
 ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n = 2^n$

証明 ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n$ は、異なる n 個のものから、重複を許さずに 0 個、1 個、2 個、 $\cdots$ 、 $n-1$ 個、 n 個のものを選ぶ方法の総数の和、つまり、異なる n 個のものから、重複を許さずに何個かを選ぶ方法の総数である。これは n 個のものそれぞれを選ぶか選ばないかを勝手に決めていく方法の総数に他ならないので、

$$\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ 個}} = 2^n$$

と等しい。

- ある欄 A の数に、その右隣の欄 B の数を加えると、B の下の欄 C の数になる：

$${}_nC_{k-1} + {}_nC_k = {}_{n+1}C_k$$

これは問 7.3 (3) で証明する。

問7.4

(1) 表を埋めると、

n	2	3	4	5	6	7
A_n	1	3	6	10	15	21
B_n	0	1	4	10	20	35

(2) $A_n = {}_nC_2, B_n = {}_nC_3$ と予想できる。

(3) どの 2 直線も平行ではないので、2 本の直線の選び方には必ず 1 つの交点に対応し、どの 3 直線も 1 点では交わらないので、直線の交点には、必ずその点を通る 2 本の直線の選び方が対応している。したがって、交点の数は 2 本の直線の選び方の数と等しく、

$$A_n = {}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

どの 2 直線も平行ではなく、どの 3 直線も 1 点では交わらないので、3 本の直線の選び方には、その 3 直線で囲まれる三角形に対応し、どの三角形にも、その 3 辺を含む 3 直線の選び方が対応する。したがって、三角形の数は 3 本の直線の選び方の数と等しく、

$$B_n = {}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$