中2数学C 2019年度3学期 場合の数 宿題解答
§3 和・積の法則2

H3.1

(1) 1文字目が a, b, c, d のものがそれぞれ

$4\times3\times2\times1=24$ 個

ずつ、計 $24\times4=96$ 個ある。

$eabcd$ は1文字目が e の文字列の1つ目のものなので、$\boxed{97}$ 番目。

(2) はじめの2文字が ea, eb, ec のものがそれぞれ

$3\times2\times1=6$ 個

ずつ、計 $6\times3=18$ 個あるので、はじめの2文字が ed であるものは

$96+18+1=115$

番目の $edabc$ からであり、このあと

$edabc, edacb, edbac$

と続くので、$edbac$ は $\boxed{117}$ 番目。

H3.2

(1) APQRB, APRQB, AQPRB, AQRPB,
ARPQB, ARQPB,
BPQRA, BPRQA, BQPRA, BQRPA,
BRPQA, BRQPA

の $3!\times2=\boxed{12}$ 通り。

(2) ABPQR, ABPRQ, ABQPR, ABQRP,
ABRPQ, ABRQP,
APQRB, APRQB, AQPRB, AQRPB,
ARPQB, ARQPB,
BAPQR, BAPRQ, BAQPR, BAQRP,
BARPQ, BARQP,
BPQRA, BPRQA, BQPRA, BQRPA,
BRPQA, BRQPA,
PQRAB, PQRBA, PRQAB, PRQBA,
QPRAB, QPRBA, QRPAB, QRPBA,
RPQAB, RPQBA, RQPAB, RQPBA

の $3!\times3!=\boxed{36}$ 通り。

H3.3

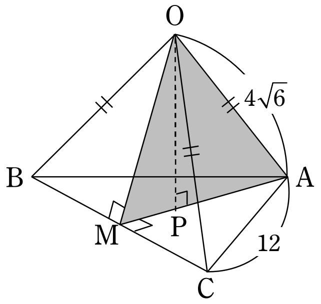
(1) $4,$
$3+1, 2+2, 1+3,$
$2+1+1, 1+2+1, 1+1+2,$
$1+1+1+1$

の8通りなので、$a_4=\boxed{8}$

(2) 同様にして、
$5,$
$4+1, 3+2, 2+3, 1+4,$
$3+1+1, 1+3+1, 1+1+3,$
$2+2+1, 2+1+2, 1+2+2,$
$2+1+1+1, 1+2+1+1,$
$1+1+2+1, 1+1+1+2$
$1+1+1+1+1$

の16通りなので、$a_5=\boxed{16}$

H3.4 $\boxed{\text{解 1}}$



BC の中点を M とし、O から AM に下した垂線の足を P とする:

$$\mathrm{OP} \perp \mathrm{AM} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

ここで、$\mathrm{OM} \not\perp \mathrm{AM}$ で、

$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}, \mathrm{BM}=\mathrm{CM}$ より $\mathrm{OM} \perp \mathrm{BC}$

$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}, \mathrm{BM}=\mathrm{CM}$ より $\mathrm{AM} \perp \mathrm{BC}$

だから、面$\mathrm{OAM} \perp \mathrm{BC}$ であり、したがって、

$$\mathrm{OP} \perp \mathrm{BC} \quad \cdots\cdots \text{②}$$

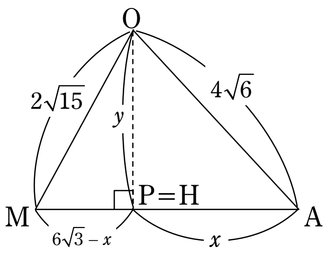
$\mathrm{AM} \not\perp \mathrm{BC}$ なので、①, ②より、$\mathrm{OP} \perp$ 面ABC であり、P は O から面 ABC に下ろした垂線の足 H と一致する。△ABC は正三角形で、中線 AM は A から BC への垂線と一致するから、△ABM は 30°, 60°, 90° の直角三角形で、

$$\mathrm{AM} = \mathrm{AB} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

また、△OBM にピタゴラスの定理を用いて、

$$\mathrm{OM} = \sqrt{\mathrm{OB}^2 - \mathrm{BM}^2} = \sqrt{\left(4\sqrt{6}\right)^2 - 6^2}$$

$$= \sqrt{96-36} = 2\sqrt{15}$$



$\mathrm{AH} = x$， $\mathrm{OH} = y$ とおき、△OAH, △OMH にピタゴラスの定理を用いると、

$$x^2 + y^2 = \left(4\sqrt{6}\right)^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 96 \quad \cdots\cdots \text{③}$$

$$\left(6\sqrt{3} - x\right)^2 + y^2 = \left(2\sqrt{15}\right)^2$$

$$\therefore 108 - 12\sqrt{3}\,x + x^2 + y^2 = 60 \quad \cdots\cdots \text{④}$$

③ − ④ より、

$$-108 + 12\sqrt{3}\,x = 96 - 60$$

$$\therefore x = \frac{144}{12\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

③に代入して、

$$y^2 = 96 - \left(4\sqrt{3}\right)^2 = 96 - 48 = 48$$

$$\therefore y = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}\ (>0)$$

(1)　$\mathrm{AH} = x = \boxed{4\sqrt{3}}$

(2)　四面体 OABC の高さは、$\mathrm{OH} = y = 4\sqrt{3}$ である。底面は 1 辺の長さ 12 の正三角形なので、面積は

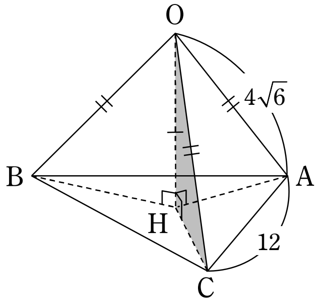
$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \times 12 \times 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$

よって、OABC の体積は

$$\frac{1}{3} \times \triangle\mathrm{ABC} \times \mathrm{OH} = \frac{1}{3} \times 36\sqrt{3} \times 4\sqrt{3}$$

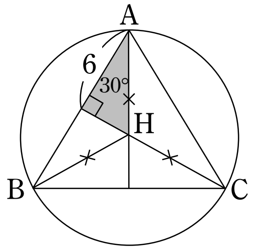
$$= \boxed{144}$$

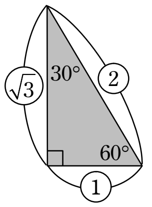
解 2



$OA = OB = OC$ なので、O から面 ABC に下した垂線の足は△ABC の外心になる。
（実際、斜辺一辺相等で
　$\triangle OAH \equiv \triangle OBH \equiv \triangle OCH$
なので、$AH = BH = CH$（対応辺）である。）

(1)　底面 ABC は、下図のよう。





よって、AH の長さは（図の灰色部分の 30°, 60°, 90° の直角三角形に注目して）

$$AH = \frac{2}{\sqrt{3}} \times 6 = \frac{12}{\sqrt{3}} = \boxed{4\sqrt{3}}$$

(2)　(1)より、四面体 OABC の高さ OH は、△OAH にピタゴラスの定理を用いて

$$OA^2 = OH^2 + AH^2$$
$$OH^2 = OA^2 - AH^2$$
$$= \left(4\sqrt{6}\right)^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2 = 48$$

$\therefore OH = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}\ (> 0)$

底面は 1 辺の長さ 12 の正三角形なので、面積は

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 12 \times 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$

よって、OABC の体積は

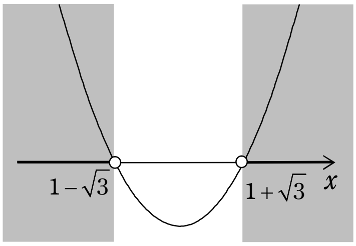
$$\frac{1}{3} \times \triangle ABC \times OH = \frac{1}{3} \times 36\sqrt{3} \times 4\sqrt{3}$$
$$= \boxed{144}$$

H3.5

(1) $$x^2-2x-2>0 \quad \cdots\cdots①$$

の解は、$y=x^2-2x-2$ のグラフで y 座標が正となるような x の範囲である。グラフの x 切片を求めると、

$$x^2-2x-2=0$$
$$x^2-2x+1=2+1$$
$$(x-1)^2=3$$
$$x-1=\pm\sqrt{3}$$
$$\therefore x=1\pm\sqrt{3}$$



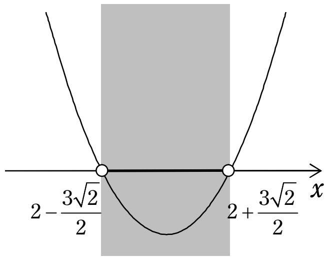
よって、図より、①の解は

$$\boxed{x<1-\sqrt{3},\quad 1+\sqrt{3}<x}$$

(2) $$2x^2-8x-1<0 \quad \cdots\cdots①$$

の解は、$y=2x^2-8x-1$ のグラフで y 座標が負となるような x の範囲である。グラフの x 切片を求めると、

$$2x^2-8x-1=0$$
$$2(x^2-4x)=1$$
$$x^2-4x+4=\frac{1}{2}+4$$
$$(x-2)^2=\frac{9}{2}$$
$$x-2=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$$
$$\therefore x=2\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$$



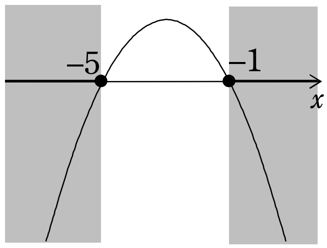
よって、図より、①の解は

$$\boxed{2-\frac{3\sqrt{2}}{2}<x<2+\frac{3\sqrt{2}}{2}}$$

(3) $$-x^2-6x-5\leqq 0 \quad \cdots\cdots①$$

の解は、$y=-x^2-6x-5$ のグラフで y 座標が 0 以下となるような x の範囲である。グラフの x 切片を求めると、

$$-x^2-6x-5=0$$
$$x^2+6x+5=0$$
$$(x+5)(x+1)=0$$
$$\therefore x=-5,\,-1$$



よって、図より、①の解は

$$\boxed{x\leqq -5,\quad -1\leqq x}$$