

中2数学C 2019年度3学期 宿題解答

§5 ${}_nC_k$ の利用1

H5.1

- (1) 問題の各整数の組 (x, y, z, w) が 10 個の○と 3 本の | を並べてできる記号列と 1 対 1 に対応するので、その総数は

$${}_{10+3}C_3 = \frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2 \times 1} = \boxed{286}$$

- (2) **解 1**

$$x' = x - 1, y' = y - 1, z' = z - 1, \\ w' = w - 1$$

とおけば、求める自然数の組 (x, y, z, w) の総数は、

$$x' + y' + z' + w' = 6$$

をみたす負でない整数の組 (x', y', z', w') の総数と一致する。それはまた、6 個の○と 3 本の | 並べ方の総数とも一致し、

$${}_{6+3}C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = \boxed{84}$$

解 2

10 個の○を先に並べ、その 9 カ所の隙間から 3 カ所を選んで | を入れることで記号列を作る。すると、このようにしてできた記号列と問題の自然数の組 (x, y, z, w) が 1 対 1 に対応する。したがって、求める総数は

$${}_9C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = \boxed{84}$$

- (3) 問 5.4(6)のように

$$w = 10 - (x + y + z)$$

とおけば、(1)に帰着できる。ここでは、(本質的に同じことだが) 文字を増やさずに解いてみる。

10 個の○と 3 本の | を並べてできる記号列に対して、| で区切られた 4 か所の○の数のうち、左から 3 つを順に x, y, z とすることで、この記号列と問題の各整数の組 (x, y, z) が対応する。よって、その総数は (1)と同じで $\boxed{286}$

H5.2

- (1) $x' = x - 1, y' = y - 1, z' = z - 1$

とおけば、求める整数の組 (x, y, z) の総数は、

$$x' + y' + z' = 7$$

をみたす負でない整数の組 (x', y', z') の総数と一致する。それはまた、7 個の○

と 2 本の | の並べ方の総数とも一致し、

$${}_{7+2}C_2 = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = \boxed{36}$$

- (2) $x' = x - 2, y' = y - 1, z' = z + 2,$

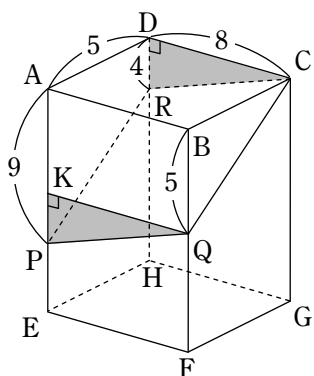
とおけば、求める整数の組 (x, y, z) の総数は、

$$x' + y' + z' = 7$$

をみたす負でない整数の組 (x', y', z') の総数と一致する。つまり(1)と同じで $\boxed{36}$

H5.3

切断面 PQCR は平行四辺形である。



- (1) Q から AP に下した垂線の足を K とすると、 $\triangle CDR \equiv \triangle QKP$ (斜辺一辺相等) となるので、
 $PK = RD = 4$
 $\therefore BQ = AK = AP - PK = 9 - 4 = \boxed{5}$

- (2) $\angle CDR = 90^\circ$ だから、ピタゴラスの定理より

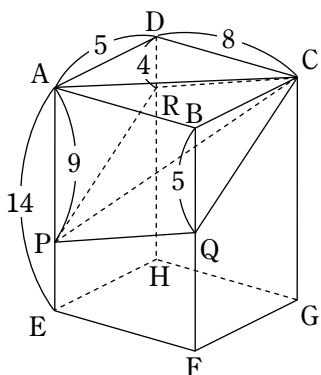
$$CR = \sqrt{CD^2 + DR^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$$

$\angle CBQ = 90^\circ$, $BC = BQ$ だから

$$CQ = \sqrt{2} BC = 5\sqrt{2}$$

よって、周の長さは

$$\begin{aligned} & CR + CQ + PQ + PR \\ &= 2(CR + CQ) \\ &= 2(4\sqrt{5} + 5\sqrt{2}) = \boxed{8\sqrt{5} + 10\sqrt{2}} \end{aligned}$$



- (3) 頂点 A を含む方の体積を求める。

四角錐 C-APQB の体積は

(面 ABQP $\perp$ BC に注意して)

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times (9+5) \times 8 \right) \times 5 = \frac{280}{3}$$

四角錐 C-APRD の体積は

(面 AD RP $\perp$ DC に注意して)

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times (9+4) \times 5 \right) \times 8 = \frac{260}{3}$$

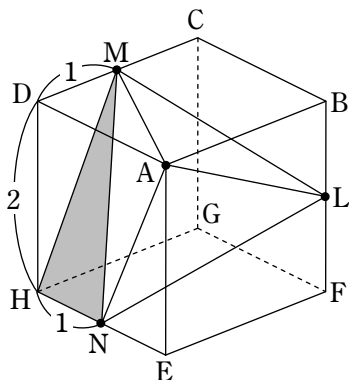
したがって、A を含む方 ABCD-PQCR の体積は

$$\frac{280}{3} + \frac{260}{3} = \frac{540}{3} = 180$$

PQCR-EFGH は、直方体から A を含む方を除いたものなので、体積は

$$8 \times 5 \times 14 - 180 = \boxed{380}$$

H5.4



- (1) $\angle ADM = 90^\circ$ だから、ピタゴラスの定理より

$$AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \boxed{\sqrt{5}}$$

- (2) $\angle MDH = 90^\circ$ だから、ピタゴラスの定理より

$$MH = \sqrt{MD^2 + DH^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

面 CDHG $\perp$ HE より $\angle MHN = 90^\circ$ だから、
ピタゴラスの定理より

$$\begin{aligned} MN &= \sqrt{MH^2 + HN^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 1^2} = \boxed{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

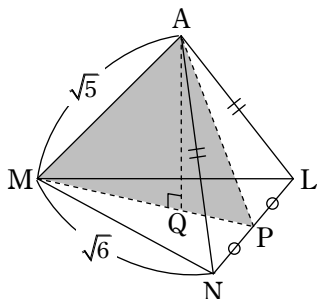
- (3) (1)(2)より、三角錐 A-LMN の辺は

$$AL = AM = AN = \sqrt{5} \dots\dots\dots ①$$

$$LM = MN = NL = \sqrt{6} \dots\dots\dots ②$$

を満たす。 $\triangle LMN$ を底面としてこの四面体の体積を計算する。

方針 1



NL の中点を P とすると、①、②より、

$$AP \perp NL, \quad MP \perp NL$$

だから、

$$\text{面 } APM \perp NL$$

となる。したがって、A から MP に下した垂線の足を Q とすると、

$$AQ \perp MP, \quad AQ \perp NL$$

であるから、

$$AQ \perp \text{面 } LMN$$

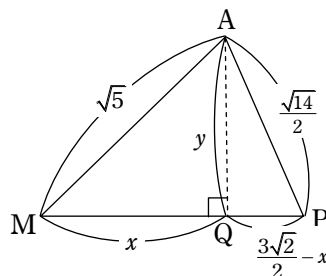
となる。高さ AQ を求めよう。

②より、 $\triangle LMN$ は正三角形だから、

$$MP = MN \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

また、 $\angle APN = 90^\circ$ だからピタゴラスの定理より

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{AN^2 - NP^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{5 - \frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{14}}{2} \end{aligned}$$



$MQ = x$, $AQ = y$ とおき、 $\triangle AMQ$, $\triangle APQ$ にピタゴラスの定理を用いると、

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2 \dots\dots\dots ③$$

$$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - x\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2$$

$$\therefore \frac{9}{2} - 3\sqrt{2}x + x^2 + y^2 = \frac{7}{2} \dots\dots\dots ④$$

③-④より、

$$-\frac{9}{2} + 3\sqrt{2}x = \frac{3}{2}$$

$$\therefore x = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

③に代入して、

$$y^2 = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2 = 5 - 2 = 3$$

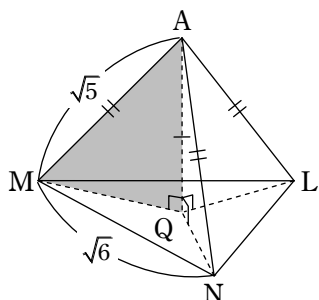
$$\therefore y = \sqrt{3} (> 0)$$

1 辺の長さが $\sqrt{6}$ の正三角形 LMN の面積
は $\frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{6} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ な の で、

A-LMN の体積は

$$\frac{1}{3} \times \triangle LMN \times AQ = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

方針 2



A から $\triangle LMN$ に下した垂線の足を Q と
すると、①より、

$$\triangle AQL \equiv \triangle AQM \equiv \triangle AQN$$

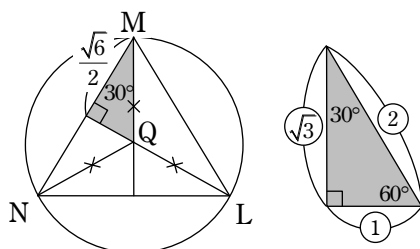
(斜辺一辺相等)

なので、Q は

$$QL = QM = QN$$

を満たす点 ($\triangle LMN$ の外心) であるこ
とが分かる。

②より、 $\triangle LMN$ は正三角形なので、次
の図より



$$QM = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{2}$$

よって、 $\triangle AQM$ にピタゴラスの定理を
用いて

$$\begin{aligned} AQ &= \sqrt{AM^2 - QM^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

1 辺の長さが $\sqrt{6}$ の正三角形 LMN の面積
は $\frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{6} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ な の で、

A-LMN の体積は

$$\frac{1}{3} \times \triangle LMN \times AQ = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \boxed{\frac{3}{2}}$$