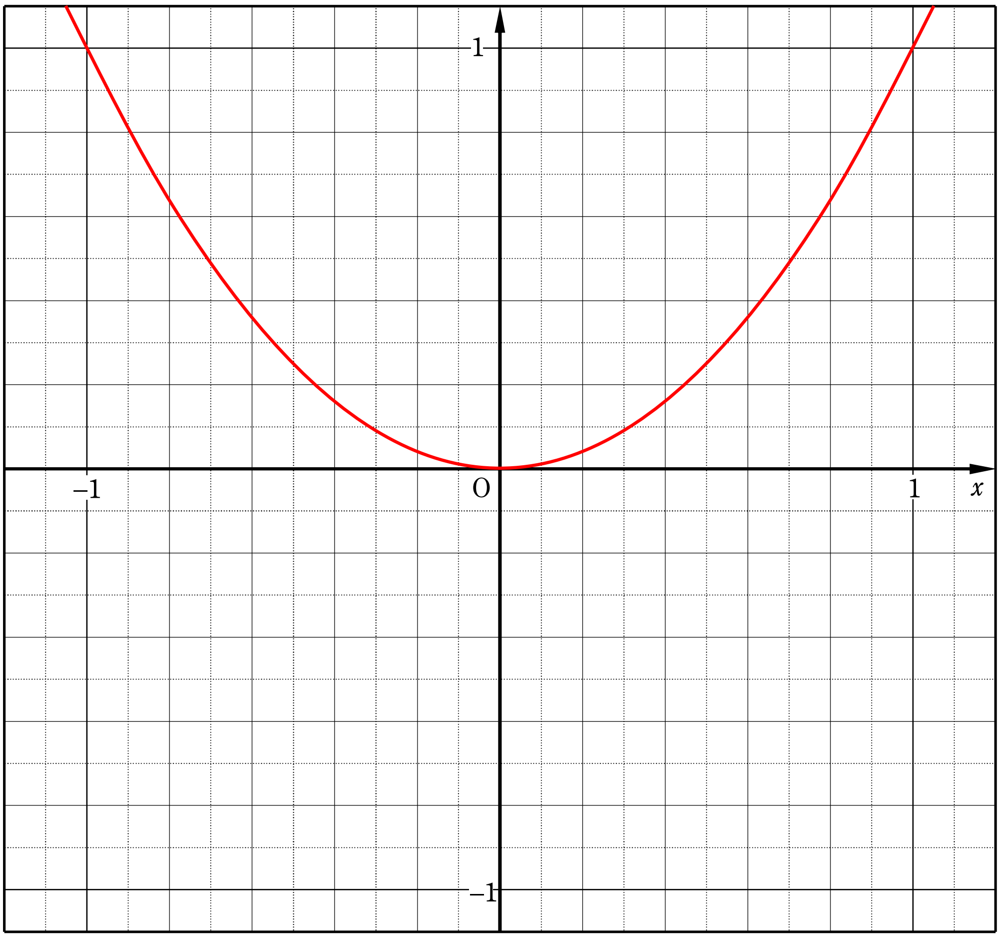
中2数学BC入会講座　2019年度冬期講習　本問解答
§1　2次関数 $y=ax^2$ のグラフ

※ 欠席してしまった場合は、問 1. 1〜問 1. 5 を（余裕があれば問 1. 6，問 1. 7 も）自分で確認し、p. 11 の宿題 H1. 1〜H1. 4 に取り組んで提出してください。

問1.1

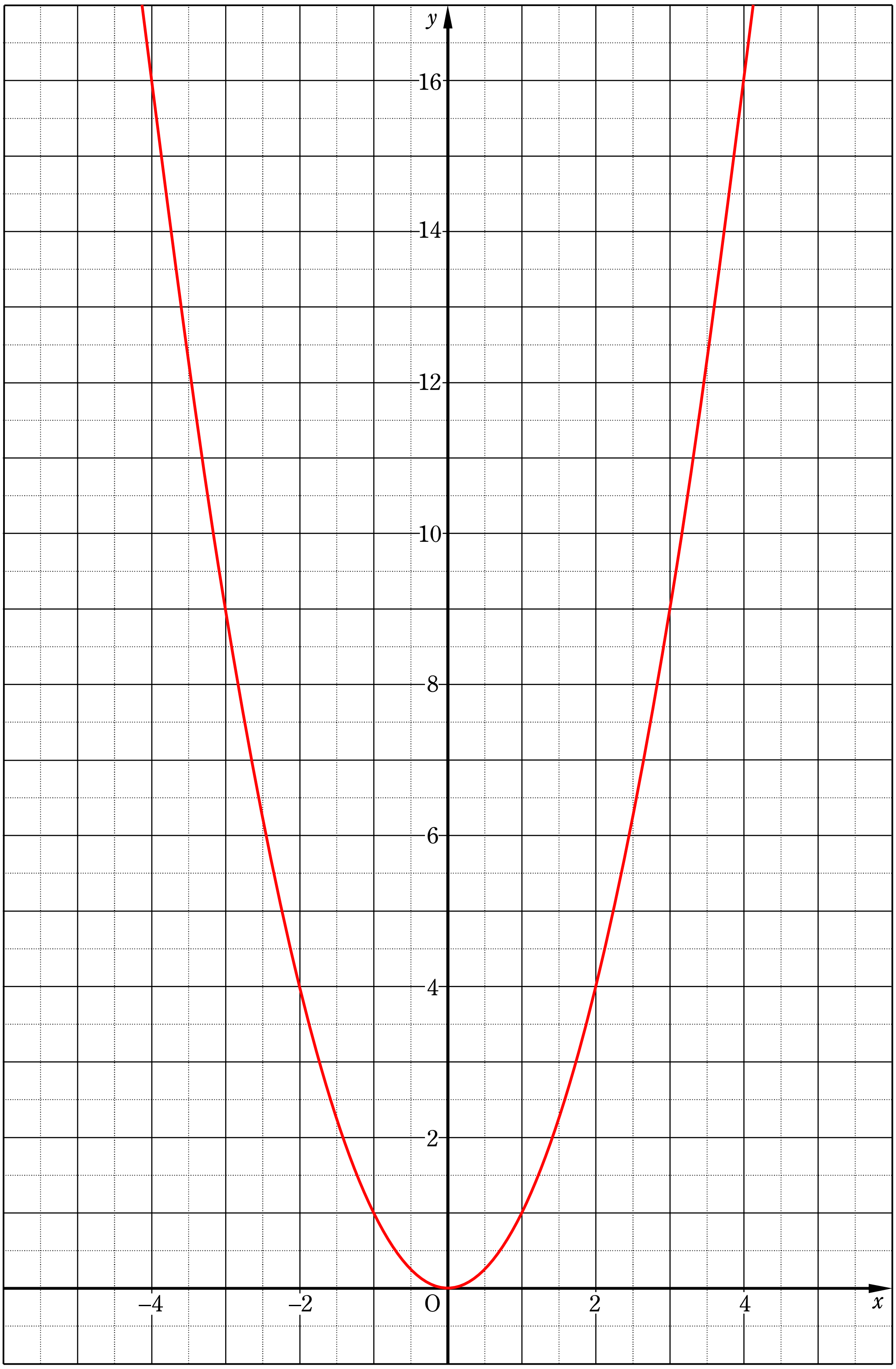
(1)

x	x^2
−1.0	1.0
−0.9	0.81
−0.8	0.64
−0.7	0.49
−0.6	0.36
−0.5	0.25
−0.4	0.16
−0.3	0.09
−0.2	0.04
−0.1	0.01
0	0
0.1	0.01
0.2	0.04
0.3	0.09
0.4	0.16
0.5	0.25
0.6	0.36
0.7	0.49
0.8	0.64
0.9	0.81
1.0	1.0

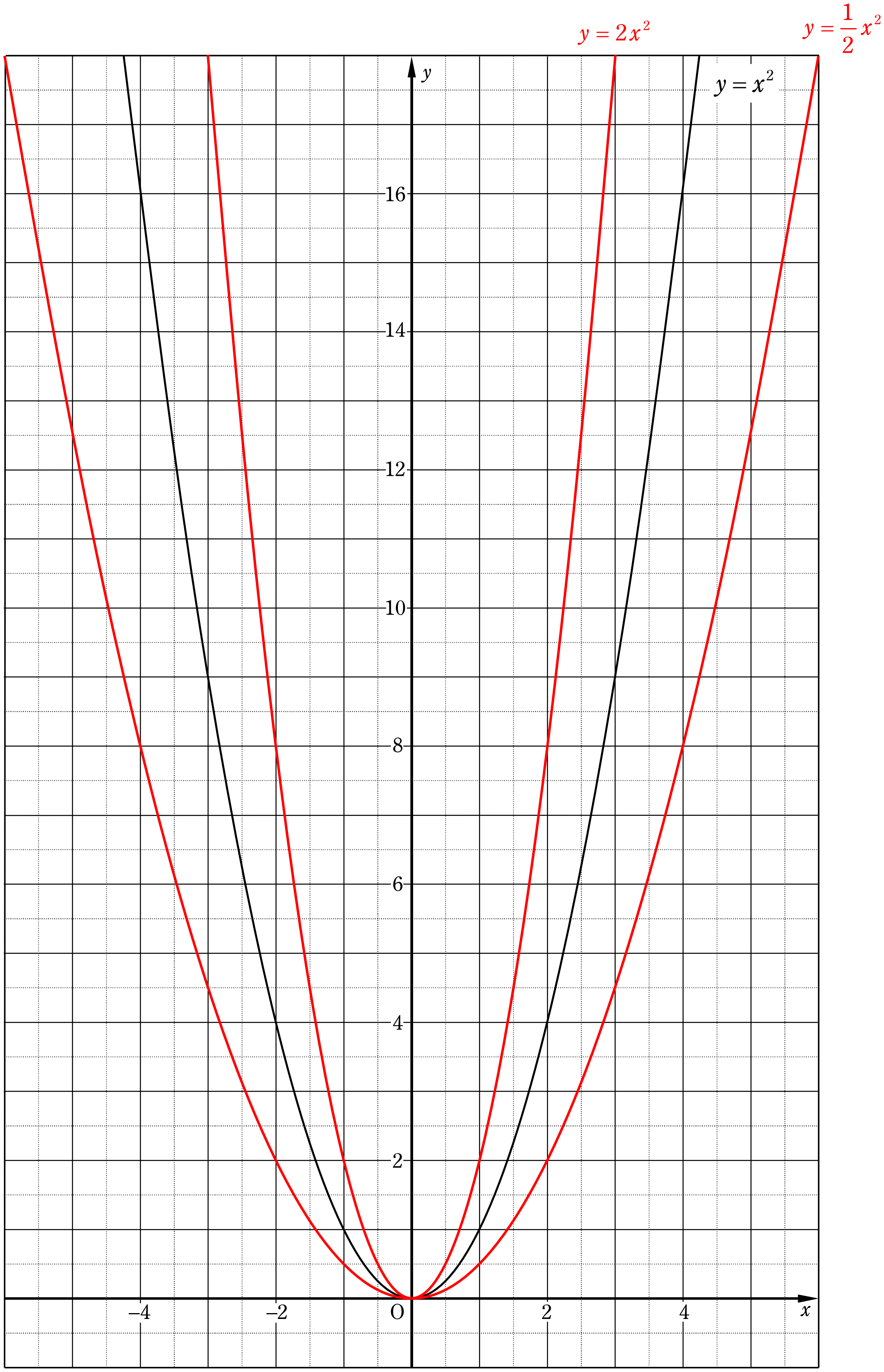


(2)

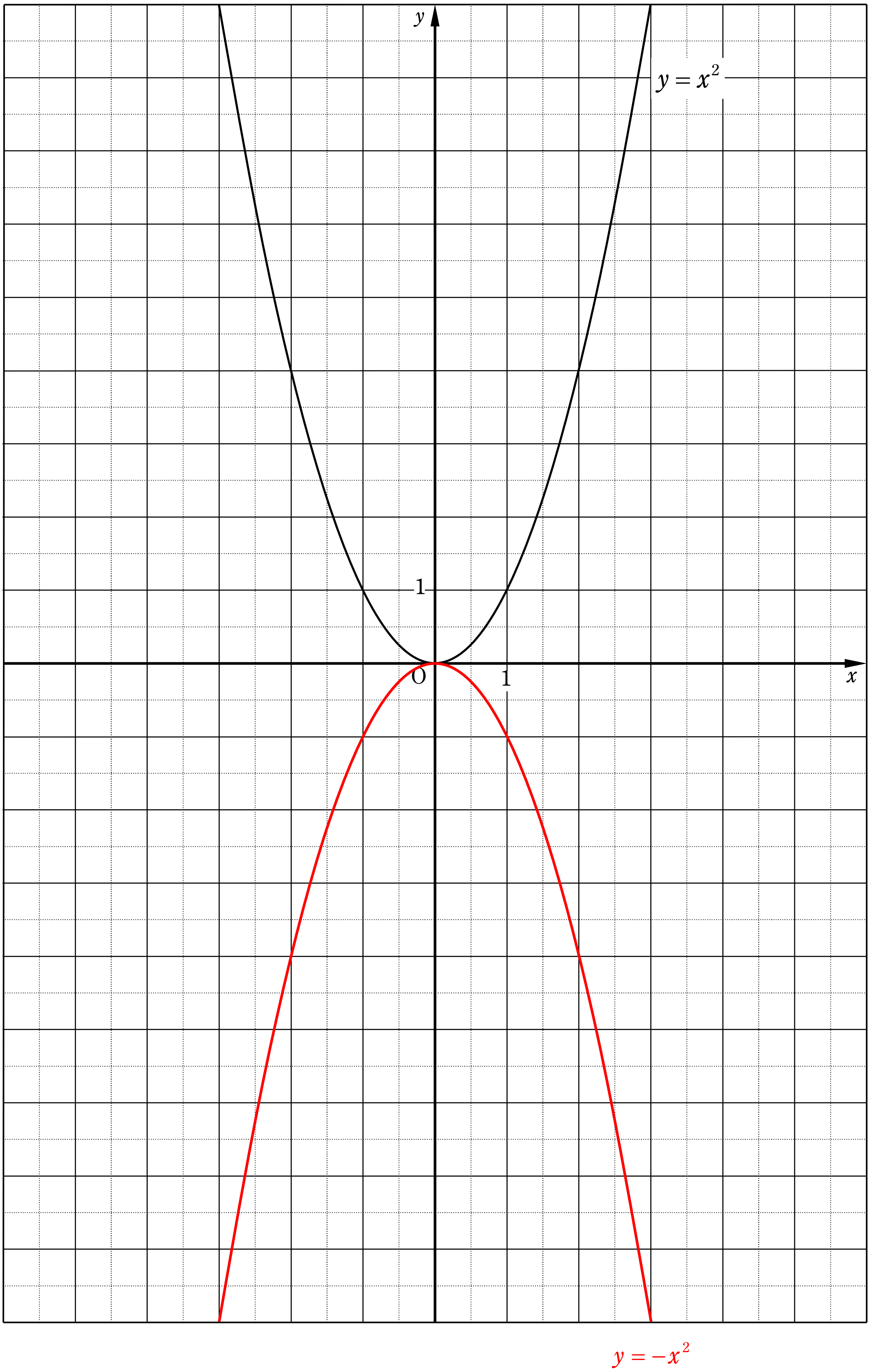
x	x^2
–4	16
–3.5	12.25
–3	9
–2.5	6.25
–2	4
–1.5	2.25
–1	1
–0.5	0.25
0	0
0.5	0.25
1	1
1.5	2.25
2	4
2.5	6.25
3	9
3.5	12.25
4	16



問1.2

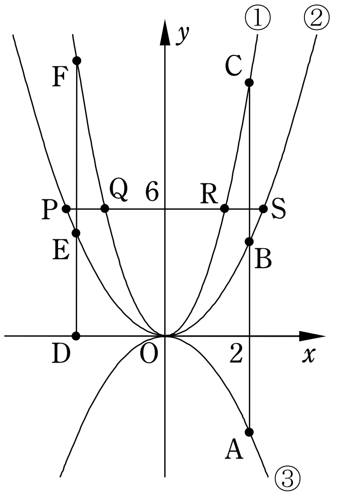


問1.3



問1.4

(イ) $y=-x^2$　　(ロ) $y=x^2$　　(ハ) $y=3x^2$



(1) ①, ②は下に凸なので、係数が正である(ロ), (ハ)のいずれかのグラフになっている。(ハ)のグラフは、(ロ)のグラフを、y 軸方向に 3 倍に拡大したものになっていることから、①が(ハ)のグラフであり、②が(ロ)のグラフであることが分かる。
また、③は上に凸なので、係数が負である(イ)のグラフと分かる。
以上より、

$\boxed{①:(ハ)\ ②:(ロ)\ ③:(イ)}$

(2) A, B, C は、それぞれ③, ②, ①上の、x 座標が 2 となる点である。よって、(イ), (ロ), (ハ)より、y 座標はそれぞれ

A： $y=-2^2=-4$

B： $y=2^2=4$

C： $y=3\times2^2=3\times4=12$

なので、A, B, C の座標は

$\boxed{A(2,-4), B(2,4), C(2,12)}$

P, S は、②上の、y 座標が 6 となる点である。
(ロ)より、②上で y 座標が 6 となる点の x 座標は、

$6=x^2$　$\therefore x=\sqrt{6},-\sqrt{6}$

なので、P の方が左側であることに注意して、P, S の座標は

$\boxed{P(-\sqrt{6},6), S(\sqrt{6},6)}$

Q, R は、①上の、y 座標が 6 となる点である。
(ハ)より、①上で y 座標が 6 となる点の x 座標は、

$6=3x^2$　　$x^2=2$

$\therefore x=\sqrt{2},-\sqrt{2}$

なので、Q の方が左側であることに注意して、Q, R の座標は

$\boxed{Q(-\sqrt{2},6), R(\sqrt{2},6)}$

（同じ y 座標をもつ点は、y 軸に関して対称に出てきていることを意識しよう！）

(3) (1)でも述べたように、(ハ)のグラフは、(ロ)のグラフを、y 軸方向に 3 倍に拡大したものになっていることから、DE : DF = $\boxed{1:3}$

問1.5

(1)

(i) $C : y = x^2$ と直線 $y = 2x + 3$ の交点の x 座標は、方程式

$$x^2 = 2x + 3$$

すなわち、

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

の実数解である。①を解くと

$$(x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -1, 3$$

となるから、2 つのグラフの交点は、

$\boxed{(-1,1),\ (3,9)}$

(ii) C と直線 $y = 2x$ の交点の x 座標は、方程式

$$x^2 = 2x$$

すなわち、

$$x^2 - 2x = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

の実数解である。②を解くと

$$x(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 0, 2$$

となるから、2 つのグラフの交点は、

$\boxed{(0,0),\ (2,4)}$

(iii) C と直線 $y = 2x - 1$ の交点の x 座標は、方程式

$$x^2 = 2x - 1$$

すなわち、

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

の実数解である。③を解くと

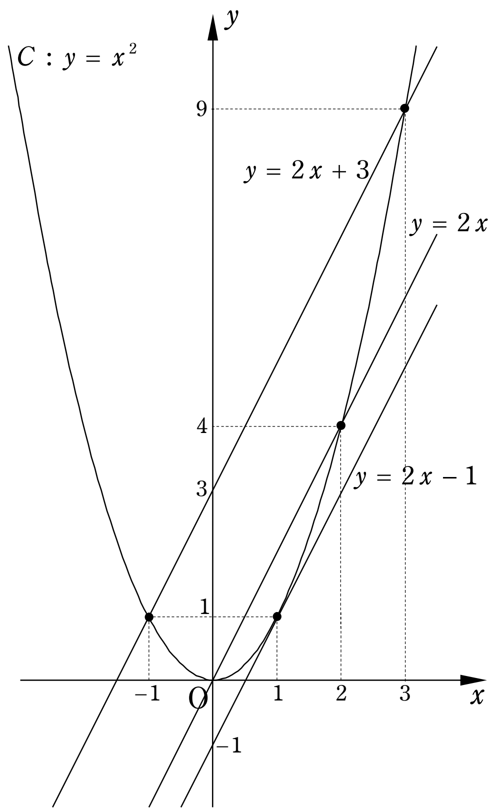
$$(x-1)^2 = 0$$

$$\therefore x = 1 \quad （重解）$$

となるから、2 つのグラフの交点は、

$\boxed{(1,1)}$

以上の結果を考慮して、C および 3 本の直線をまとめて図示すると下のようになる。



(2) $C : y = x^2$ の $x = 1$ における接線の式が、

$$y = px + q \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

であるとする。C との共有点の x 座標は、方程式

$$x^2 = px + q$$

すなわち、

$$\therefore x^2 - px - q = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

の実数解である。C と直線①の共有点が x 座標が 1 の点のみであるから、⑤は $x = 1$ を重解にもつことになる。よって、⑤の左辺は

$$x^2 - px - q = (x-1)^2$$

と因数分解される。右辺を展開すると、

$$x^2 - px - q = x^2 - 2x + 1$$

となる（x の 2 次式として両辺が等しい）から、係数を比較して、

$$\begin{cases} -p = -2 \\ -q = 1 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} p = 2 \\ q = -1 \end{cases}$$

を得る。④に代入して、求める接線の式は、

$\boxed{y = 2x - 1}$

問1.6

(1) $C: y = x^2$ の $x = -3$ における接線の式を、

$$y = px + q \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

とおく。C との共有点の x 座標は、

$$x^2 = px + q$$

$$x^2 - px - q = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

の実数解である。C と直線①が $x = -3$ で接するので、②は $x = -3$ を重解にもつ。よって、②の左辺は、

$$\begin{aligned} x^2 - px - q &= (x+3)^2 \\ &= x^2 + 6x + 9 \end{aligned}$$

と表される。係数を比較して、

$$\begin{cases} -p = 6 \\ -q = 9 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} p = -6 \\ q = -9 \end{cases}$$

を得るから、①に代入して、求める接線の式は、

$$\boxed{y = -6x - 9}$$

(2) $C: y = x^2$ の $x = t$ における接線の式を、

$$y = px + q \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

とおく。(1)と同様に、x の方程式

$$x^2 - px - q = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が、$x = t$ を重解にもつから、②の左辺は、

$$\begin{aligned} x^2 - px - q &= (x-t)^2 \\ &= x^2 - 2tx + t^2 \end{aligned}$$

と表される。係数を比較して、

$$\begin{cases} -p = -2t \\ -q = t^2 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} p = 2t \\ q = -t^2 \end{cases}$$

を得るから、①に代入して、求める接線の式は、

$$\boxed{y = 2tx - t^2}$$

問1.7

C と l が接するのは、共有点の x 座標を求める x の方程式

$$x^2 = kx - 4$$

$$\therefore x^2 - kx + 4 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

が重解をもつときである。

$\boxed{解 1}$ ③を平方完成により変形すると、

$$x^2 - 2 \times \frac{k}{2}x + \frac{k^2}{4} = -4 + \frac{k^2}{4}$$

$$\left(x - \frac{k}{2}\right)^2 = -4 + \frac{k^2}{4}$$

となる。よって、③が重解をもつのは、

$$-4 + \frac{k^2}{4} = 0$$

$$k^2 = 16, \quad \therefore \boxed{k = 4, -4}$$

のときである。

$\boxed{解 2}$ ③が $x = t$ を重解にもつとすると、左辺は、

$$\begin{aligned} x^2 - kx + 4 &= (x-t)^2 \\ &= x^2 - 2tx + t^2 \end{aligned}$$

と表される。係数を比較して、

$$\begin{cases} -k = -2t & \cdots\cdots ④ \\ \ \ 4 = t^2 & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

⑤より $t = 2, -2$ だから、④より得られる $k = 2t$ に代入して、

$$\boxed{k = 4, -4}$$

なお, 解 1, 解 2 のようにせずとも、③の定数項に着目して、③が重解をもつとすればそれは $x = 2$ または $x = -2$ であることがわかるから、最初から③の左辺が

$$\begin{aligned} x^2 - kx + 4 &= \{x - (\pm 2)\}^2 \\ &= (x \mp 2)^2 \\ &= x^2 \mp 4x + 4 \end{aligned}$$

と表されるとしてよい。1 次の係数を比較すれば、

$$-k = \mp 4, \quad \therefore \boxed{k = \pm 4}$$

がわかる（以上、すべて複号同順)。