中2数学BC入会講座 2019年度冬期講習 本問解答
§3 グラフで考えよう

※ 欠席してしまった場合は、問 3.1〜問 3.3 を（余裕があれば問 3.5 も）自分で確認し、p.23 の宿題 H3.1, H3.2 に取り組んで提出してください。

問3.1

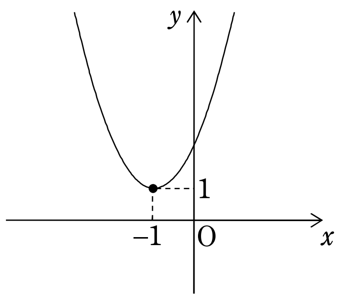
(1) $y = x^2 + 2x + 2$

$= (x^2 + 2x + 1) + 1$

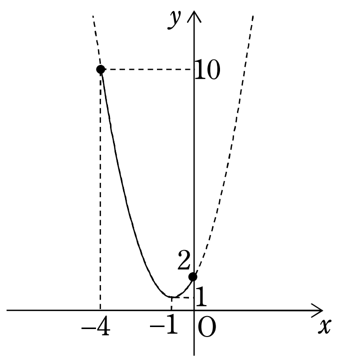
$= (x+1)^2 + 1$

より、この関数のグラフは、頂点が $(-1, 1)$ の下に凸な放物線である。

(i) x が実数全体を変化するときの値域は、$\boxed{y \geqq 1}$ である。



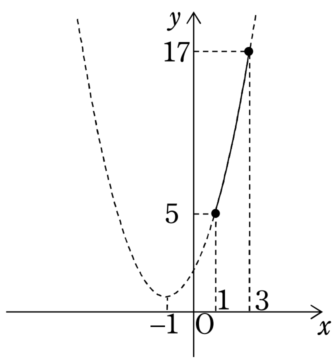
(ii) $x = -4$ のとき $y = 3^2 + 1 = 10$ だから、グラフより、x が $-4 \leqq x \leqq 0$ を変化するときの値域は、$\boxed{1 \leqq y \leqq 10}$ である。



(iii) $x = 1$ のとき $y = 2^2 + 1 = 5$,

$x = 3$ のとき $y = 4^2 + 1 = 17$

だから、グラフより、x が $1 \leqq x \leqq 3$ を変化するときの値域は、$\boxed{5 \leqq y \leqq 17}$ である。



(2) $y=-2x^2+8x+3$

$=-2(x^2-4x)+3$

$=-2(x^2-4x+4)+2\times4+3$

$=-2(x-2)^2+11$

より、この関数のグラフは、頂点が$(2,11)$の上に凸な放物線である。

$x=-10$ のとき

$y=-2\times(-12)^2+11=-277$,

$x=13$ のとき

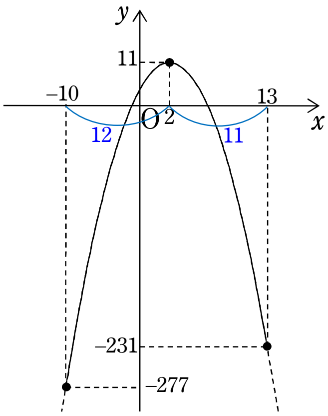
$y=-2\times11^2+11=-231$

だから、グラフより、x が $-10\leqq x\leqq13$ を変化するときの

最大値は $\boxed{y=11 \quad (x=2)}$

最小値は $\boxed{y=-277 \quad (x=-10)}$

である。



※ $x=-10$ の方が $x=13$ よりも $x=2$ から離れているので、$x=-10$ のときの y の値の方が $x=13$ のときの y の値よりも小さくなることが分かる。このことを述べておけば、$x=13$ のときの y の値は計算しなくともよい。

問3.2

(1) $y=x^2-3x$

$$=\left(x^2-2\times\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{4}$$

$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$$

より、この関数のグラフは、頂点が $\left(\frac{3}{2},-\frac{9}{4}\right)$ の下に凸な放物線である。

よって、x が $-1\leqq x\leqq 3$ を変化するときの

最小値は $\boxed{y=-\frac{9}{4}\quad\left(x=\frac{3}{2}\right)}$

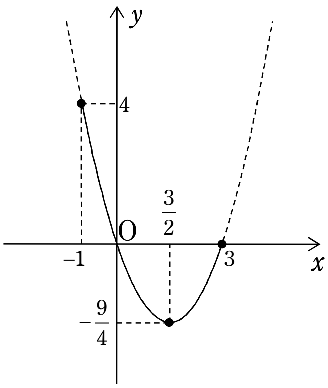
である。また、$x=-1$ の方が $x=3$ よりも $x=\frac{3}{2}$ から離れているので、$x=-1$ で最大になると分かる。$x=-1$ のとき、

$$y=(-1)^2-3\times(-1)=1+3=4$$

だから、

最大値は $\boxed{y=4\quad(x=-1)}$

である。



(2) $y=3x^2-5x+2$

$$=3\left(x^2-\frac{5}{3}x\right)+2$$

$$=3\left(x^2-2\times\frac{5}{6}x+\frac{25}{36}\right)-\cancel{3}\times\frac{25}{\cancel{36}_{12}}+2$$

$$=3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{1}{12}$$

より、この関数のグラフは、頂点が $\left(\frac{5}{6},-\frac{1}{12}\right)$ の下に凸な放物線である。

よって、x が $-2\leqq x\leqq 3$ を変化するときの

最小値は $\boxed{y=-\frac{1}{12}\quad\left(x=\frac{5}{6}\right)}$

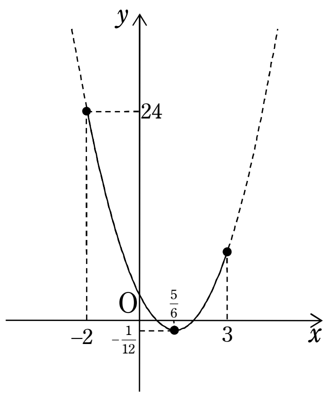
である。また、$x=-2$ の方が $x=3$ よりも $x=\frac{5}{6}$ から離れているので、$x=-2$ で最大になると分かる。$x=-2$ のとき、

$$y=3\times(-2)^2-5\times(-2)+2$$
$$=12+10+2=24$$

だから、

最大値は $\boxed{y=24\quad(x=-2)}$

である。



問3.3

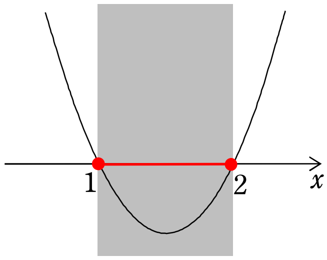
(1) $(x-2)(x-1) \leqq 0$

の解は、$y=(x-2)(x-1)$ のグラフで y 座標が 0 以下になる部分の、x 座標の範囲である。

$y=(x-2)(x-1)$ のグラフは $y=x^2$ のグラフを平行移動したものであり、x 切片は

$(x-2)(x-1)=0$

より、$x=2,1$



したがって、図より、求める解は

$\boxed{1 \leqq x \leqq 2}$

(2) $-2x^2-6x+8 \leqq 0$

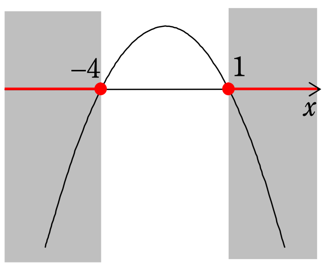
の解は、

$y=-2x^2-6x+8$ ………………………… ①

のグラフで y 座標が 0 以下になる部分の、x 座標の範囲である。

$$\begin{aligned} y &= -2x^2-6x+8 \\ &= -2(x^2+3x-4) \\ &= -2(x+4)(x-1) \end{aligned}$$

より、①のグラフは、x 切片が $-4, 1$ の上に凸な放物線（$y=-2x^2$ のグラフを平行移動したもの）である。



したがって、図より、求める解は

$\boxed{x \leqq -4,\ \ 1 \leqq x}$

(3) $-x^2-x+1>0$

の解は、$y=-x^2-x+1$ のグラフで y 座標が正になる部分の、x 座標の範囲である。

$y=-x^2-x+1$ のグラフは上に凸な放物線で、x 切片は

$$-x^2-x+1=0$$

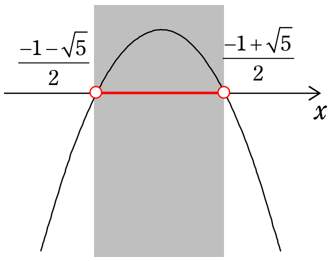
$$x^2+x-1=0$$

$$x^2+x+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{4}$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

$$x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$



よって、図より、求める解は

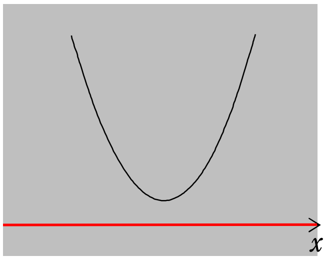
$$\boxed{\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

(4) $x^2-2x+2>0$

の解は、$y=x^2-2x+2$ のグラフで y 座標が正になる部分の、x 座標の範囲である。$y=x^2-2x+2$ のグラフは下に凸な放物線で、x 切片を求めようとすると

$$x^2-2x+1=-1$$
$$(x-1)^2=-1$$

となり、これを満たす実数は存在しないので、グラフは x 軸と交点を持たないことが分かる。



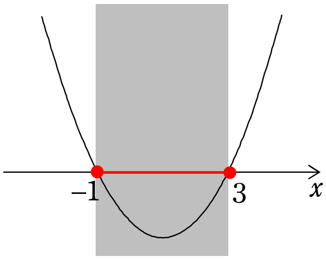
よって、図より、求める解は $\boxed{\text{全実数}}$

問3.4

問 3.3 の類題なので、詳しい解説は略す。

(1)　$(x+1)(x-3) \leqq 0$

の解は、$\boxed{-1 \leqq x \leqq 3}$

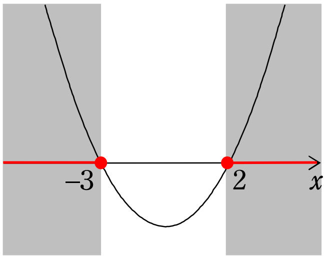


(2)　$2x^2 + 2x - 12 \geqq 0$

$2(x^2 + x - 6) \geqq 0$

$2(x+3)(x-2) \geqq 0$

$\therefore \boxed{x \leqq -3,\ 2 \leqq x}$



(3)　$-x^2 - 4x + 1 < 0$

を解くために、まず

$-x^2 - 4x + 1 = 0$

を解くと、

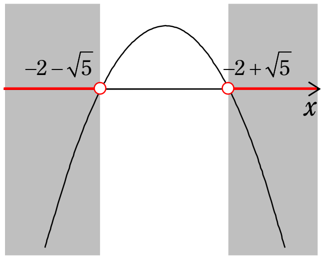
$x^2 + 4x - 1 = 0$

$x^2 + 4x + 4 = 1 + 4$

$(x+2)^2 = 5$

$x + 2 = \sqrt{5}, -\sqrt{5}$

$x = -2 + \sqrt{5}, -2 - \sqrt{5}$

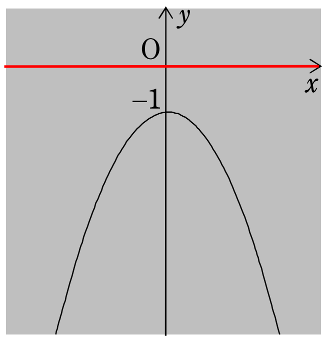


したがって、不等式の解は

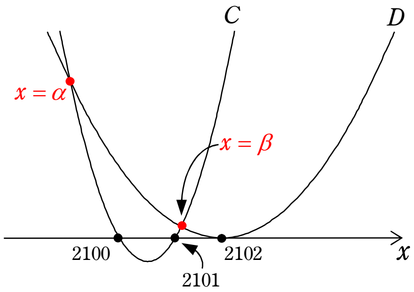
$\boxed{x < -2 - \sqrt{5},\ -2 + \sqrt{5} < x}$

(4)　$-2x^2 - 1 < 0$

の解は、$y = -2x^2 - 1$ のグラフで y 座標が負になる部分の x 座標の範囲だから、図より $\boxed{\text{全実数}}$



問3.5



$$y=3(x-2100)(x-2101) \quad \cdots\cdots ①$$

のグラフを C、

$$y=(x-2102)^2 \quad \cdots\cdots ②$$

のグラフを D とする。方程式

$$3(x-2100)(x-2101)=(x-2102)^2 \quad \cdots\cdots ③$$

の実数解は、C と D の共有点の x 座標である。

C は x 切片が 2100, 2101 の下に凸な放物線であり、D は $x=2102$ で x 軸に接する下に凸な放物線である。さらに、①の x^2 の係数が 3 で、②の x^2 の係数が 1 であることも考えると、上の図のように、C と D が $x<2100$ の範囲と $2101<x<2102$ の範囲に 1 つずつ交点をもつことが分かる。ゆえに、方程式③は、確かに異なる 2 実解 α, β をもち、

$$\alpha<2100, \quad 2101<\beta<2102$$

である。 したがって、まず

$\boxed{\beta \text{ の整数部分は } 2101}$

と分かった。

次に、α の整数部分を明らかにするため、$x<2100$ の範囲での整数値において、C と D の上下関係を調べよう。

$x=2099$ のとき、

①では $y=3\times(-1)\times(-2)=6$

②では $y=(-3)^2=9$

なので，$x=2099$ では C が D より下側にある。

$x=2098$ のとき、

①では $y=3\times(-2)\times(-3)=18$

②では $y=(-4)^2=16$

なので，$x=2098$ では C が D より上側にある。

これらのことと、最初の図より、C と D の左側の交点は、$2098<x<2099$ の範囲にあると分かる。つまり、

$$2098<\alpha<2099$$

であり、

$\boxed{\alpha \text{ の整数部分は } 2098}$

である。