

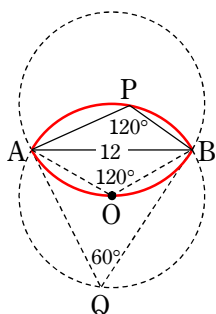
中2数学B 2019年度冬期 本問解答

§2 軌跡の応用問題

※ 欠席してしまった場合は、問 2.1, 問 2.3 を（余裕があれば問 2.2 も）自分で確認し、p.14 の宿題 H2.1, H2.2 に取り組んで提出してください。

問2.1

- (1) $\angle APB = 120^\circ$ (一定) であるから、P の軌跡は下図の太線部のような、二つの円弧を合わせた図形となる。



このうち、直線 AB より上の部分の円弧の中心を O とし、円 O 上、直線 AB よりも下の部分に、点 Q を取ると、内接四角形の定理より

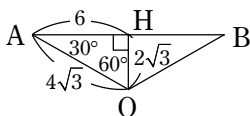
$$\angle AQB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

よって、円周角の定理より、

$$\angle AOB = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$$

O から AB に垂線 OH を引くと、 $\triangle OAB$ は、 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

の三角定規の形
二つに分割でき
て、



$$OH = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 6 = 2\sqrt{3},$$

$$OA = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

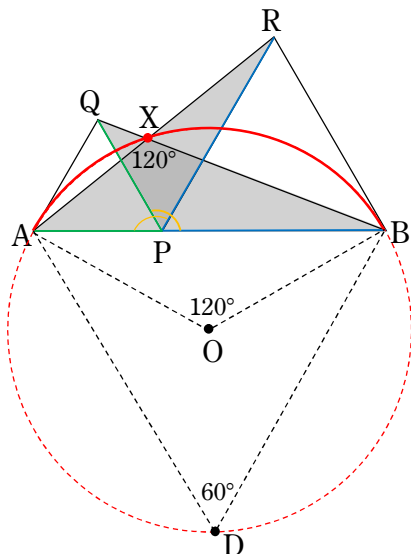
軌跡に囲まれる図形のうち、直線 AB より上の部分は、半径 $4\sqrt{3}$ 、中心角 120° の扇形 OAB から、 $\triangle OAB$ を除いたものなので、面積は

$$\begin{aligned} & \left(4\sqrt{3}\right)^2 \times \pi \times \frac{120^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \times 12 \times 2\sqrt{3} \\ &= 16\pi - 12\sqrt{3} \end{aligned}$$

AB より下の部分も同じ面積なので、求める図形の面積 S は

$$S = 2(16\pi - 12\sqrt{3}) = \boxed{32\pi - 24\sqrt{3}}$$

問2.2



△APR と△QPB において、
△APQ は正三角形 ①
だから、

$$AP = QP \quad \text{..... ②}$$

また、

$$\triangle BPR \text{ は正三角形} \quad \text{..... ③}$$

だから、

$$PR = PB \quad \text{..... ④}$$

さらに、

$$\angle APR = 180^\circ - \angle BPR \quad (\text{平角定理})$$

$$= 180^\circ - 60^\circ \quad (\because \text{③})$$

$$\therefore \angle APR = 120^\circ \quad \text{..... ⑤}$$

$$\angle QPB = 180^\circ - \angle APQ \quad (\text{平角定理})$$

$$= 180^\circ - 60^\circ \quad (\because \text{①})$$

$$\therefore \angle QPB = 120^\circ \quad \text{..... ⑥}$$

⑤, ⑥より、

$$\angle APR = \angle QPB \quad \text{..... ⑦}$$

②, ④, ⑦より

$$\triangle APR \equiv \triangle QPB \quad (\text{二辺夾角相等})$$

したがって、

$$\angle ARP = \angle QBP \quad (\text{対応角}) \quad \text{..... ⑧}$$

$$\angle AXB = 180^\circ - \angle RAB - \angle QBP$$

$$(\triangle ABX \text{ に内角定理})$$

$$= 180^\circ - \angle RAB - \angle ARP \quad (\because \text{⑧})$$

$$= \angle APR$$

$$(\triangle APR \text{ に内角定理})$$

$$= 120^\circ \quad (\because \text{⑤})$$

$$\therefore \angle AXB = 120^\circ \quad (\text{一定})$$

ゆえに、X の軌跡は図のような円弧となる。

この軌跡を含む円周上に、AB に関して X と反対側に点 D を取ると、内接四角形の定理より、

$$\angle ADB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

よって、円の中心を O とすれば、円周角の定理より

$$\angle AOB = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$$

である。O から AB

へ垂線 OH を引く

と、△OAH は、

30°, 60°, 90° の三角

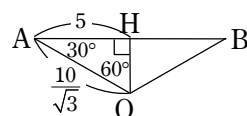
定規の形だから、

$$OA = \frac{2}{\sqrt{3}} \times AH = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

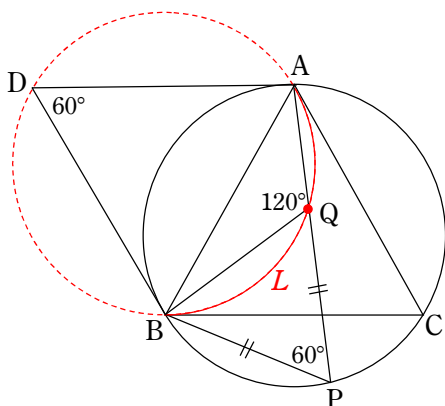
したがって、求める X の軌跡の長さは、

$$2 \times \pi \times \frac{10}{\sqrt{3}} \times \frac{120^\circ}{360^\circ} = \boxed{\frac{20\sqrt{3}}{9} \pi}$$

である。



問2.3



円周角の定理より、

$$\angle APB = \angle ACB = 60^\circ$$

であるから、仮定の $PB=PQ$ と合わせると、 $\triangle PBQ$ は正三角形である。したがって、

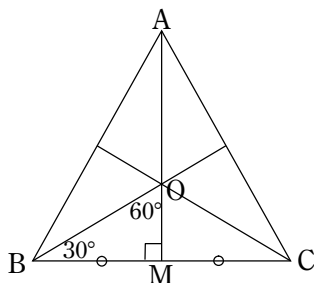
$$\angle AQB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \text{ (一定)}$$

であるから、 Q の軌跡は上の図のような円弧 (L とする) である。

さて、 L を含む円周上に、 AB に関して Q と反対側に点 D を取ると、内接四角形の定理より、

$$\angle ADB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

特に、 $\triangle ADB$ が正三角形になるように D を取ることができる。すると、 $\triangle ADB$ は $\triangle ABC$ と合同な正三角形となるので、その外接円の半径も一致する。したがって、軌跡 L の半径は $\triangle ABC$ の外接円の半径に等しい。



$\triangle ABC$ の外心を O 、辺 BC の中点を M とすると、 $\triangle OBM$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の三角定規の形だから、

$$OB = \frac{2}{\sqrt{3}} BM = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} BC = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

これが L の半径であり、中心角は、

$$2\angle ADB = 2 \times 60^\circ = 120^\circ \text{ (円周角の定理)}$$

だから、求める L の長さは、

$$2\pi \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{120^\circ}{360^\circ} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi}$$