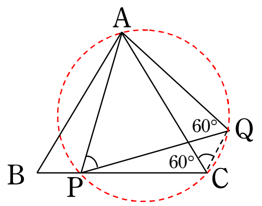
中2数学B 2019年度冬期 円と直線の幾何　本問解答
§4　共円をみつけよう

欠席してしまった場合は、問 4.1〜問 4.3 を（余裕があれば問 4.4 も）自分で確認しておきましょう。

問4.1



(1)　$\triangle ABC$, $\triangle APQ$ はともに正三角形だから、

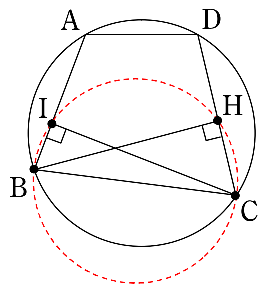
$\angle ACP = \angle AQP\ (= 60^\circ)$

したがって、円周角の定理の逆により、A, P, C, Q は同一円周上にある。

(2)　$\angle ACQ = \angle APQ$　((1)より、円周角の定理)

$= \boxed{60^\circ}$　($\triangle APQ$は正三角形)

問4.2



ABCD は円に内接する四角形なので、

$\angle BCD + \angle BAD = 180^\circ$ ………………………… ①

また、 $AB \perp CI$, $CD \perp BH$ より

$\angle BIC = 90^\circ = \angle BHC$

なので、B, I, H, C は同一円周上にあり（円周角の定理の逆）、BIHC はこの円に内接するので、

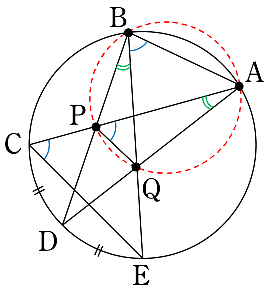
$\angle BCD + \angle BIH = 180^\circ$ ………………………… ②

①,②より、$\angle BAD = \angle BIH$ なので、

AD // HI （同位角定理）

(q.e.d.)

問4.3



弧 AE に対する円周角を考え、

　$\angle \mathrm{ACE} = \angle \mathrm{ABE}$ ………………………………… ①

弧長と円周角は比例するから、$\overset{\frown}{\mathrm{CD}} = \overset{\frown}{\mathrm{DE}}$ より、

　$\angle \mathrm{PAQ} = \angle \mathrm{PBQ}$

よって、円周角の定理の逆により、A, B, P, Q は同一円周上にあり、この円の弧 AQ に対する円周角を考え、

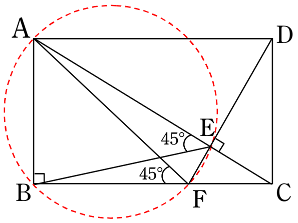
　$\angle \mathrm{ABE} = \angle \mathrm{APQ}$ ………………………………… ②

①,②より、$\angle \mathrm{ACE} = \angle \mathrm{APQ}$ なので、

　$\mathrm{PQ} \parallel \mathrm{CE}$ （同位角定理）

(q.e.d.)

問4.4



まず、△DFC と△ACD において、

$\angle DCF = \angle ADC\ (=90^\circ)$ ……………………………①

△CFE に外角定理を用いて、

$$\begin{aligned}\angle DFC &= \angle DEC - \angle ACB \\ &= 90^\circ - \angle ACB \\ &= \angle DCB - \angle ACB \\ &= \angle ACD\end{aligned}$$

$\therefore \angle DFC = \angle ACD$ ……………………………………②

①, ②より、

$\triangle DFC \backsim \triangle ACD$ （二角相等） ……………③

次に、

$$\begin{aligned}\angle ABF + \angle AEF &= 90^\circ + 90^\circ \\ &= 180^\circ\end{aligned}$$

だから、内接四角形の定理の逆により、4 点 A, B, F, E は同一円周上にある。したがって、円周角の定理より、

$\angle AFB = \angle AEB = 45^\circ$

よって、$\angle ABF = 90^\circ$ と合わせて、△ABF は直角二等辺三角形であり、

$BF = AB = 1$

したがって、求める BC の長さを x とおくと、

$CF = BC - BF = x - 1$

となるから、③の対応辺の比を考えて、

$$\begin{aligned}&FC : CD = CD : DA \\ &x - 1 : 1 = 1 : x \\ &(x-1)x = 1 \times 1 \\ &\therefore x^2 - x = 1\end{aligned}$$

を得る。

この 2 次方程式を解いて、

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$x - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$x > 0$ だから、

$$BC = x = \boxed{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$