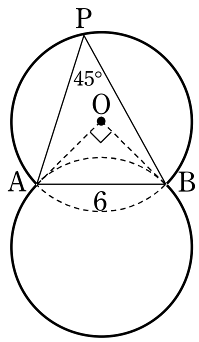
中2数学B 2019年度冬期 宿題解答
§1 軌跡としての円

H1.1

$\angle APB = 45°$ (一定) であるから、P の軌跡は下図の太線部のような、二つの円弧を合わせた図形になる。



このうち、直線 AB より上の部分の円弧の中心を O とすると、円周角の定理より

$\angle AOB = 2 \times 45° = 90°$

で、$\triangle OAB$ は直角二等辺三角形となり、

$$OA = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 6 = 3\sqrt{2}$$

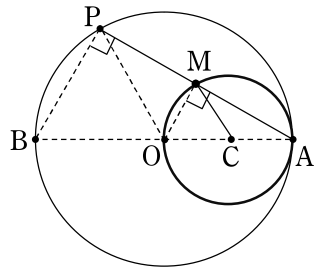
よって、優弧 AB は、半径 $3\sqrt{2}$ 、中心角 $270°$ の扇形の弧であり、弧の長さは

$$2 \times 3\sqrt{2} \times \pi \times \frac{270°}{360°} = \frac{9\sqrt{2}}{2}\pi$$

AB より下の部分も同じ長さなので、求める軌跡の長さ l は

$$l = 2 \times \frac{9\sqrt{2}}{2}\pi = \boxed{9\sqrt{2}\,\pi}$$

H1.2



AB が円 O の直径となるように点 B を取る。P が A と一致するとき、M も A と一致する。また、P が B と一致するとき、M は O と一致する。

解1　P が A, B と一致していないとき、

$$AO = \frac{1}{2}AB, \quad AM = \frac{1}{2}AP \quad \cdots\cdots ①$$

だから、中点連結定理より、

$OM \mathbin{/\!/} BP$

したがって、

$\angle AMO = \angle APB$ （同位角） $\cdots\cdots ②$

$= 90°$ （円周角の定理）

よって、M の軌跡は

$\boxed{\text{OA を直径とする円}}$

である。

解2　OA の中点を C とする。
P が A, B と一致していないとき、

$$AC = \frac{1}{2}AO, \quad AM = \frac{1}{2}AP \quad \cdots\cdots ③$$

だから、中点連結定理より、

$$CM = \frac{1}{2}OP = \frac{1}{2} \times (\text{円O の半径}) \quad \cdots\cdots ④$$

よって、よって、M の軌跡は

$\boxed{\text{OA の中点が中心、半径が円 O の}\frac{1}{2}\text{倍の円}}$

である。

※　①から、△AOM は△ABP の A を中心とした$\frac{1}{2}$倍の相似拡大であるから、②が分かる、としてもよい。また、③から△ACM は△AOP の A を中心とした$\frac{1}{2}$倍の相似拡大であるから、④が分かる、としてもよい。

※　結局、円 O の A を中心とした$\frac{1}{2}$倍の相似拡大が、半径$\frac{1}{2}$倍の円であると示されたことになる。