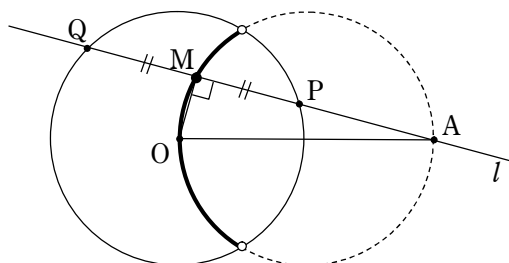


中2数学B 2019年度冬期 宿題解答

§2 軌跡の応用問題

H2.1

(1)



Mは円Oの弦PQの中点だから、

$$OM \perp PQ$$

よって、

$$\angle OMA = 90^\circ$$

であるから、MはOAを直径とする円周上にある。lが円Oと交点をもつように動くとき、Mはその円周上でかつ円Oの内部にある部分をくまなく動く。

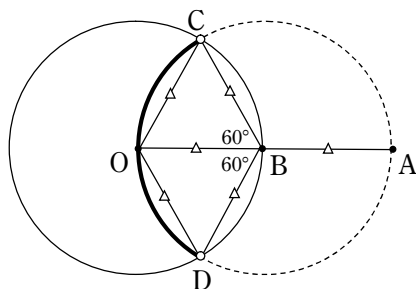
以上より、Mの軌跡は

OAを直径とする円周のうち、

円Oの内部にある円弧

である。

(2)



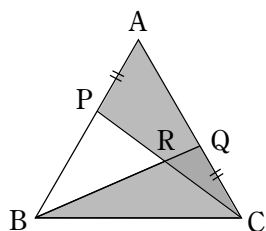
円Oの半径が4で、 $AO=8$ だから、Mの軌跡の円弧の半径は円Oの半径と一致している。また、その中心BはOAの中点である。よって、図のように点C、Dをとると、 $\triangle OBC$ 、 $\triangle OBD$ はともに正三角形で、

$$\angle CBD = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$$

したがって、Mの軌跡の長さは

$$2 \times \pi \times 4 \times \frac{120^\circ}{360^\circ} = \boxed{\frac{8}{3}\pi}$$

H2.2



[仮定]

$\triangle ABC$ は正三角形……………①

$AP = CQ$ ……………②

$\triangle ACP$ と $\triangle CBQ$ において、①より

$AC = CB$, $\angle PAC = \angle QCB$

だから、②と合わせて

$\triangle ACP \equiv \triangle CBQ$ (二辺夾角相等)

よって、

$\angle ACP = \angle CBQ$ (対応角) ……………③

ここで、 $\triangle BCR$ の内角和を考え、

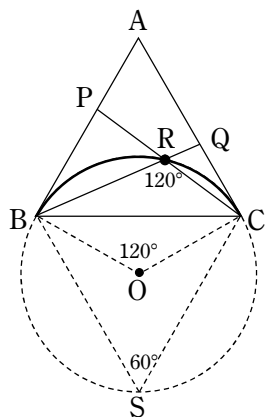
$$\begin{aligned}\angle BRC &= 180^\circ - \angle CBQ - \angle BCP \\ &= 180^\circ - \angle ACP - \angle BCP \quad (\because \text{③})\end{aligned}$$

$$= 180^\circ - \angle ACB$$

$$= 180^\circ - 60^\circ \quad (\because \text{①})$$

$\therefore \angle BRC = 120^\circ$ (一定)

したがって、 R の軌跡は次の図の太線のような円弧となる。



この円弧の中心を O とし、円 O 上、直線 BC よりも下の部分に、点 S を取ると、内接四角形の定理より

$$\angle BSC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

よって、円周角の定理より、

$$\angle BOC = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$$

O から BC に垂線 OH

を引くと、 $\triangle OBC$ は、

$30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の三角

定規の形二つに分割

できて、

$$OH = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 3 = \sqrt{3},$$

$$OB = 2OH = 2\sqrt{3}$$

R の軌跡と BC が囲む図形は、半径 $2\sqrt{3}$, 中心角 120° の扇形 OBC から、 $\triangle OBC$ を除いたものなので、面積は

$$(2\sqrt{3})^2 \times \pi \times \frac{120^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{3}$$

$$= \boxed{4\pi - 3\sqrt{3}}$$

