

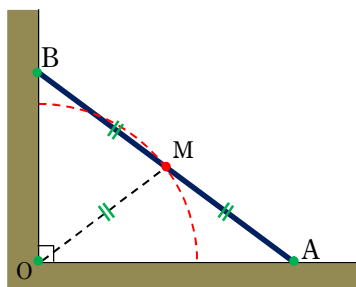
中2数学C 2019年度冬期 本問解答

§1 軌跡としての円

※ 欠席してしまった場合は、問 1.2～問 1.5 を（余裕があれば問 1.1 も）自分で確認し、p.10 の宿題 H1.1, H1.2 に取り組んで提出してください。

問1.1

建物の床と壁の両方に垂直な方向から見て、梯子を線分とみなす。床と壁の交点を O ，梯子の両端を A, B ，初めに猫が座っていた AB の中点を M とする。



常に $\angle AOB = 90^\circ$ であるから、 M は直角三角形 OAB の斜辺の中点であり、したがって、

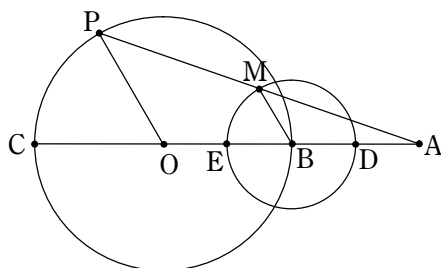
$$OM = AM = BM$$

が成り立つ。よって、 M は

$$OM = 1 \quad (\text{一定})$$

を満たしながら動き、その軌跡は、 O を中心とする半径 1 の円周の一部である。

問1.2



直線 AO と円 O の交点を、 A に近い方から B, C とし、 AB, AC の中点をそれぞれ D, E とおく。

$$AB = AO - OB = 8 - 4 = 4$$

だから、 B は AO の中点である。さらに M が AP の中点であることから、 $\triangle APO$ に中点連結定理を用いて、

$$BM = \frac{1}{2}OP = 2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

(P が B や C と一致するとき、 A, P, O は一直線上にあり三角形をなさないが、このとき M はそれぞれ D, E と一致し、やはり $\textcircled{1}$ は成り立つ。)

$\textcircled{1}$ より、 M は B を中心とした半径 2 の円(円 B とする)の周上にある。また、 P が円 O を 1 周するとき、 M も円 B を 1 周する。したがって、 M の軌跡は、

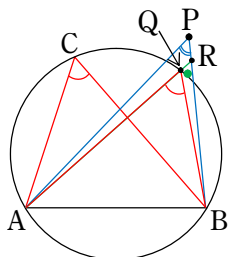
AO の中点を中心とする半径 2 の円

である。

※ M の軌跡は、 A を中心とした円 O の $\frac{1}{2}$ 倍の相似拡大である。

問1.3

- (1) P が△ABC の外接円の外部にあるとき、△APB の内部にあって、かつ△ABC の外接円の周上にある点 Q が取れる。さらに、AQ と BP の交点を R とする。



△APR, △BQR に外角定理を用いて、

$$\angle APB = \angle ARB - \angle PAR,$$

$$\angle ARB = \angle AQB - \angle QBR$$

なので、

$$\angle APB < \angle ARB < \angle AQB$$

さらに、

$$\angle AQB = \angle ACB \quad (\text{円周角の定理})$$

であるから、

$$\boxed{\angle APB < \angle ACB}$$

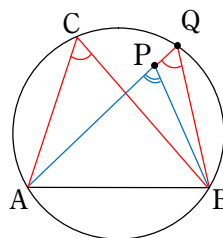
と分かる。

- ※ この図の場合は、線分 AP または BP と△ABC の外接円の (A, B 以外の) 交点を Q とし、

$$\angle APB < \angle AQB = \angle ACB$$

とする方が簡単だが、線分 AP, BP がともに△ABC の外接円と交点をもたない場合にも通用する方法を採った。

- (2) P が△ABC の外接円の内部にあるとき、AP と△ABC の外接円の A 以外の交点を Q とする。



△BPQ に外角定理を用いて、

$$\angle APB = \angle AQB + \angle QBP,$$

$$\therefore \angle APB > \angle AQB$$

さらに、

$$\angle AQB = \angle ACB \quad (\text{円周角の定理})$$

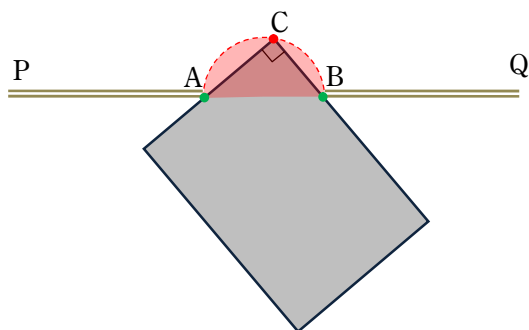
であるから、

$$\boxed{\angle APB > \angle ACB}$$

と分かる。

問1.4

隙間 AB から差し込まれたノートの角を C とする。



すると、常に $\angle ACB = 90^\circ$ であるから、C は AB を直径の両端とする円周上を動く。したがって、ノートの隙間から差し込んだ部分が動く領域は、上の図のような

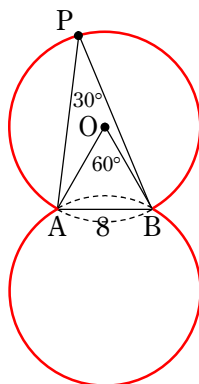
AB を直径とした半円

であると分かる。

問1.5

- (1) $\angle APB = 30^\circ$ (一定)

であるから、P の軌跡は右図の太線部分のような、二つの円弧を合わせた図形となる。



- (2) P の軌跡のうち、直線 AB より上側の部分である円弧 C の中心を O とすると、円周角の定理より、 $\angle AOB = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$ によって、 $\triangle OAB$ は正三角形であり、軌跡の上半分である C は半径 8、中心角 300° の円弧。したがって、AB と C で囲まれる部分は、扇形 OAB と $\triangle OAB$ に分けられて、面積は

$$\begin{aligned} & 8^2 \times \pi \times \frac{300^\circ}{360^\circ} + \frac{1}{2} \times 8 \times 4\sqrt{3} \\ &= \frac{160}{3} \pi + 16\sqrt{3} \end{aligned}$$

AB より下側の部分も同じ面積なので、求める面積は

$$2 \left(\frac{160}{3} \pi + 16\sqrt{3} \right) = \boxed{\frac{320}{3} \pi + 32\sqrt{3}}$$