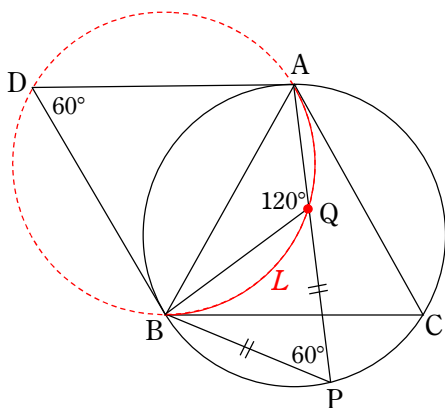


中2数学C 2019年度冬期 本問解答

§2 軌跡の応用問題

※ 欠席してしまった場合は、問 2.1, 問 2.3 を（余裕があれば問 2.2 も）自分で確認し、p.14 の宿題 H2.1～H2.3 に取り組んで提出してください。

問2.1



円周角の定理より、

$$\angle APB = \angle ACB = 60^\circ$$

であるから、 $PB=PQ$ と合わせると、 $\triangle PBQ$ は正三角形である。したがって、

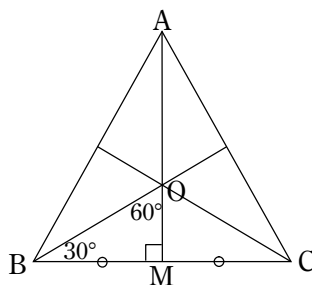
$$\angle AQB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \text{ (一定)}$$

であるから、 Q の軌跡は上の図のような円弧（ L とする）である。

さて、 L を含む円周上に、 AB に関して Q と反対側に点 D を取ると、内接四角形の定理より、

$$\angle ADB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

特に、 $\triangle ADB$ が正三角形になるように D を取ることができる。すると、 $\triangle ADB$ は $\triangle ABC$ と合同な正三角形となるので、その外接円の半径も一致する。したがって、軌跡 L の半径は $\triangle ABC$ の外接円の半径に等しい。



$\triangle ABC$ の外心を O 、辺 BC の中点を M とすると、 $\triangle OBM$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の三角定規の形だから、

$$OB = \frac{2}{\sqrt{3}} BM = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} BC = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

これが L の半径であり、中心角は、

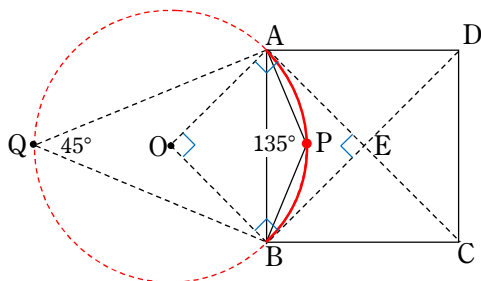
$$2\angle ADB = 2 \times 60^\circ = 120^\circ \text{ (円周角の定理)}$$

だから、求める L の長さは、

$$2\pi \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{120^\circ}{360^\circ} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi}$$

問2.2

まず、 $ABCD$ の内部にあって $\angle APB = 135^\circ$ をみたす点 P の軌跡は、次の図のような円弧になる。



図において、 O は円弧の中心、 Q は円弧を含む円周上で正方形の外部の点、 E は正方形 $ABCD$ の対角線の交点である。

$APBQ$ は円に内接する四角形なので、

$$\angle AQB = 180^\circ - \angle APB = 45^\circ$$

よって、円周角の定理より、

$$\angle AOB = 2 \times \angle AQB = 90^\circ$$

だから、 $\triangle OAB$ は直角二等辺三角形である。

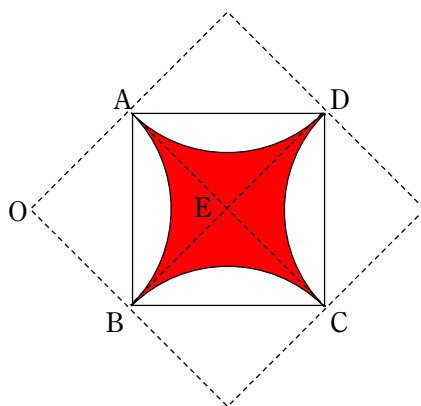
さらに、 $\triangle EAB$ も直角二等辺三角形なので、

$$\angle OAE = \angle OBE = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$$

であり、正方形の対角線は軌跡の円弧に接していることに注意する。

さて、 $\angle APB \leq 135^\circ$ をみたす点 P の範囲は、上記の円の周および外部である。したがって、 $ABCD$ の内部にあって $\angle APB, \angle BPC, \angle CPD, \angle DPA$ がすべて 135° 以下であるような点 P の範囲は、対角線 AC, BD に関する対称性より、次の図のようになる。

(4つの円弧は AC, BD に接していて、よって互いに A, B, C, D 以外の共有点を持たない。)



$\triangle OAB$ は直角二等辺三角形だから、円弧の半径 OA は、

$$OA = \frac{1}{\sqrt{2}} AB = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

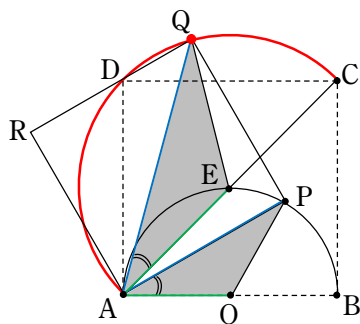
AB と円弧で囲まれる部分は、扇形 OAB から $\triangle OAB$ を除いたものだから、その面積は

$$\begin{aligned} & \pi \times OA^2 \times \frac{90^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \times OA \times OB \\ &= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) OA^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

P の動きうる範囲の面積は、正方形 $ABCD$ の面積から、この面積の4倍を引いたものに等しく、

$$\begin{aligned} AB^2 - 4 \times \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) &= 1 - 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \boxed{2 - \frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

問2.3



ABCD が正方形 ①

で、A, B, C, D の順に反時計回りになるように点 C, D をとる。さらに、AC の中点を E とする。

$\triangle EAQ$ と $\triangle OAP$ において、

$$AE = \frac{1}{2}AC, AO = \frac{1}{2}AB \text{ で、①より } AC = \sqrt{2}AB$$

だから、

$$AE = \sqrt{2}AO \text{ ②}$$

また、

APQR は正方形 ③

だから、

$$AQ = \sqrt{2}AP \text{ ④}$$

②, ④より、

$$AE:AO = AQ:AP (= \sqrt{2}:1) \text{ ⑤}$$

さらに、P が弧 AE 上にあるときは、

$$\begin{aligned} \angle EAQ &= \angle PAQ + \angle PAC \\ &= 45^\circ + \angle PAC \quad (\because \text{③}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle OAP &= \angle BAC + \angle PAC \\ &= 45^\circ + \angle PAC \quad (\because \text{①}) \end{aligned}$$

P が弧 EB 上にあるときは、

$$\begin{aligned} \angle EAQ &= \angle PAQ - \angle PAC \\ &= 45^\circ - \angle PAC \quad (\because \text{③}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle OAP &= \angle BAC - \angle PAC \\ &= 45^\circ - \angle PAC \quad (\because \text{①}) \end{aligned}$$

いずれにしても、

$$\angle EAQ = \angle OAP \text{ ⑥}$$

⑤, ⑥より

$\triangle EAQ \sim \triangle OAP$ (二辺比夾角相等)

したがって、

$$EQ:OP = AE:AO \text{ (対応辺の比)}$$

$$= \sqrt{2}:1$$

$$\therefore EQ = \sqrt{2}OP = 2\sqrt{2}$$

であり、Q は E を中心とした半径 $2\sqrt{2}$ の円周上にある。また P が半円 O の周上を A から B まで動くとき、Q は円 E の周上を A から C まで動く。

以上より、Q の軌跡は、点 E を中心とした図のような半径 $2\sqrt{2}$ の半円で、その長さは

$$2 \times 2\sqrt{2} \times \pi \times \frac{1}{2} = \boxed{2\sqrt{2}\pi}$$

※ ほぼ同様に、 $\triangle CAQ \sim \triangle BAP$ を示すこともできる。この場合は、対応角を考え、 $\angle AQC = \angle APB = 90^\circ$

から、Q の軌跡が AC を直径とする円の一部であることが分かる。

別解 (略解) $\angle APQ = 90^\circ$, $\angle APB = 90^\circ$ より、B, P, Q が一直線上にあるので、

$$\angle AQB = \angle AQP = 45^\circ \text{ (一定)}$$

よって、 $\angle ACB = 45^\circ$ と合わせて、Q が $\triangle ABC$ の外接円上にあることが分かる。P が A から B まで半円 O の周上を動くとき、Q は $\triangle ABC$ の外接円の周上を A から C まで動くから、Q の軌跡は AC を直径とする半円である。

(この方法だと、P が弧 AE 上にあるか弧 EB 上にあるかで場合分けしなくて済む。)

※ ④と $\angle PAQ = 45^\circ$ により、Q は A を中心として P を $\sqrt{2}$ に相似拡大し、さらに 45° 回転した点である。よってその軌跡は、P の軌跡である半円 O を、A を中心として $\sqrt{2}$ に相似拡大し、さらに 45° 回転した半円になる。