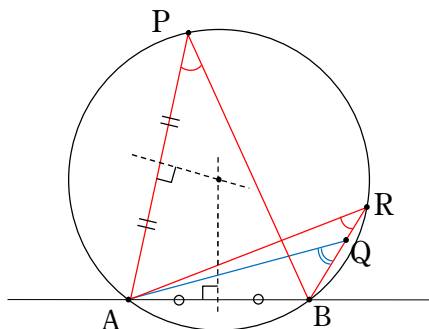


中2数学C 2019年度冬期 本問解答

§3 共円条件

※ 欠席してしまった場合は、問 3.2, 問 3.3, 問 3.4 を自分で確認し、p.20 の宿題 H3.1, H3.2 に取り組んで提出してください。(余裕があれば問 3.5, H3.3 にも取り組みましょう。)

問3.1



$\triangle ABP$ の外接円を描く。(その外心は、線分 AB の垂直二等分線と線分 AP の垂直二等分線の交点として作図できる。) すると Q がその円の内部にあることが分かる。 BQ と円の B 以外の交点を R とすると、

$$\angle AQB = \angle ARB + \angle RAQ$$

($\triangle AQR$ で外角定理)

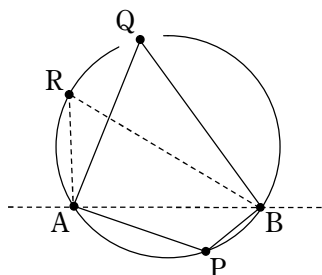
$$> \angle ARB$$

$$= \angle APB \quad (\text{円周角の定理})$$

したがって、 AB を見込む角は、 $\angle APB$ よりも $\angle AQB$ の方が大きい。

問3.2

$\triangle APB$ の外接円 O の、 P を含まない方の弧 AB 上に勝手な点 R を取る。



すると、 $APBR$ は円に内接する四角形なので、
 $\angle ARB = 180^\circ - \angle APB$

一方、仮定より

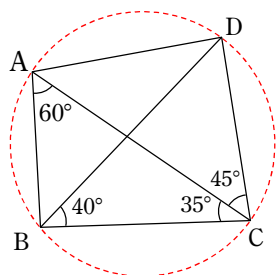
$$\angle AQB = 180^\circ - \angle APB$$

したがって、 $\angle ARB = \angle AQB$ であるから、円周角の定理の逆により、点 Q も円 O 上にある。
 したがって、 A, P, B, Q が同一円周上にあることが示された。

(q.e.d.)

問3.3

(1)



△BCD の内角和を考えて、
 $\angle BDC = 180^\circ - 40^\circ - (35^\circ + 45^\circ)$
 $= 60^\circ$

よって、

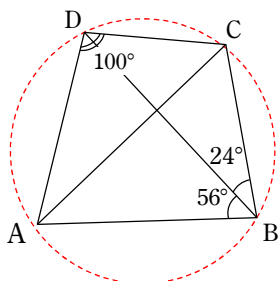
$$\angle BAC = \angle BDC$$

だから、円周角の定理の逆により、
 4点 A, B, C, D は同一円周上にある。

したがって、円周角の定理より、

$$\angle CAD = \angle CBD = \boxed{40^\circ}$$

(2)



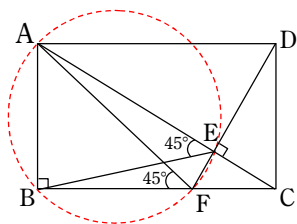
$$\begin{aligned}\angle ADC + \angle ABC &= 100^\circ + (56^\circ + 24^\circ) \\ &= 180^\circ\end{aligned}$$

だから、内接四角形の定理の逆により、
 4点 A, B, C, D は同一円周上にある。

したがって、円周角の定理より、

$$\angle CAD = \angle CBD = \boxed{24^\circ}$$

問3.4



まず、 $\triangle DFC$ と $\triangle ACD$ において、
 $\angle DCF = \angle ADC (= 90^\circ)$ ①

$\triangle CFE$ に外角定理を用いて、

$$\begin{aligned}\angle DFC &= \angle DEC - \angle ACB \\ &= 90^\circ - \angle ACB \quad (\text{仮定より } DE \perp AC) \\ &= \angle DCB - \angle ACB \quad (ABCD \text{ は長方形}) \\ &= \angle ACD \\ \therefore \angle DFC &= \angle ACD \text{②}\end{aligned}$$

①、②より、

$$\triangle DFC \sim \triangle ACD \quad (\text{二角相等}) \text{③}$$

次に、

$$\begin{aligned}\angle ABF + \angle AEF &= 90^\circ + 90^\circ \\ &= 180^\circ\end{aligned}$$

だから、内接四角形の定理の逆により、4
 点 A, B, F, E は同一円周上にある。したが
 って、円周角の定理より、

$$\angle AFB = \angle AEB = 45^\circ$$

よって、 $\angle ABF = 90^\circ$ と合わせて、 $\triangle ABF$ は
 直角二等辺三角形であり、

$$BF = AB = 1$$

したがって、求める BC の長さを x とおくと、

$$CF = BC - BF = x - 1$$

となるから、③の対応辺の比を考えて、

$$FC : CD = CD : DA$$

$$x - 1 : 1 = 1 : x$$

$$(x - 1)x = 1 \times 1$$

$$\therefore x^2 - x = 1$$

を得る。

この 2 次方程式を解いて、

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$x - \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

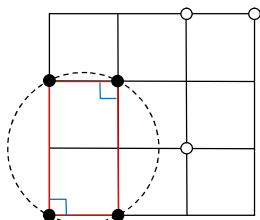
$$\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$x > 0$ だから、

$$BC = x = \boxed{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

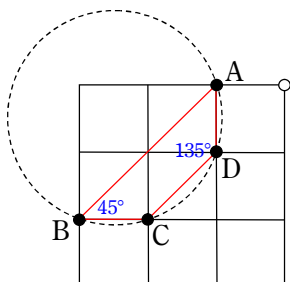
問3.5

(1)



図の4点の黒丸は長方形の頂点をなすから同一円周上にある。
 (長方形は、その向い合う角の和が $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ であるから、円に内接している。)

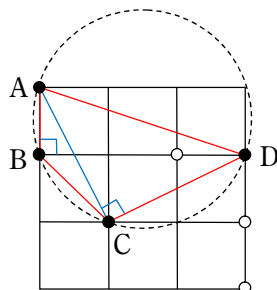
(2)



図において、
 $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle ADC = 135^\circ$
 $\therefore \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$
 だから、内接四角形の定理の逆により、
 A, B, C, D は同一円周上にある。

※ 一般に等脚台形は円に内接する。

(3)



[ACの傾き]×[CDの傾き]

$$= -2 \times \frac{1}{2}$$

$$= -1$$

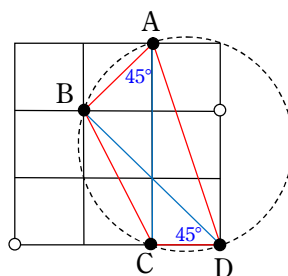
だから、 $\angle ACD = 90^\circ$ である。

一方、 $\angle ABD = 90^\circ$ だから、

$$\angle ACD = \angle ABD$$

したがって、円周角の定理の逆により、
 A, B, C, D は同一円周上にある。

(4)



図において、
 $\angle BAC = \angle BDC (= 45^\circ)$
 だから、円周角の定理の逆により、A, B, C, D は同一円周上にある。