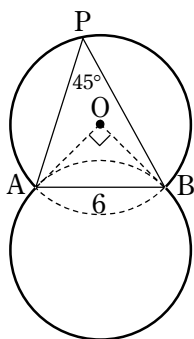


中2数学C 2019年度冬期 宿題解答

§1 軌跡としての円

H1.1

- (1) $\angle APB = 45^\circ$ (一定) であるから、P の軌跡は下図の太線部のような、二つの円弧を合わせた図形になる。



このうち、直線 AB より上の部分の円弧の中心を O とすると、円周角の定理より
 $\angle AOB = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$

で、 $\triangle OAB$ は直角二等辺三角形となり、

$$OA = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 6 = 3\sqrt{2}$$

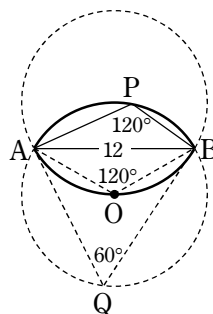
よって、優弧 AB は、半径 $3\sqrt{2}$ 、中心角 270° の扇形の弧であり、弧の長さは

$$2 \times 3\sqrt{2} \times \pi \times \frac{270^\circ}{360^\circ} = \frac{9\sqrt{2}}{2} \pi$$

AB より下の部分も同じ長さなので、求める軌跡の長さ l は

$$l = 2 \times \frac{9\sqrt{2}}{2} \pi = \boxed{9\sqrt{2} \pi}$$

- (2) $\angle APB = 120^\circ$ (一定) であるから、P の軌跡は下図の太線部のような、二つの円弧を合わせた図形となる。



このうち、直線 AB より上の部分の円弧の中心を O とし、円 O 上、直線 AB よりも下の部分に、点 Q を取ると、内接四角形の定理より

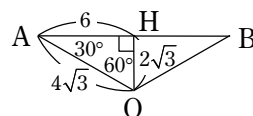
$$\angle AQB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

よって、円周角の定理より、

$$\angle AOB = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$$

O から AB に垂線 OH を引くと、 $\triangle OAB$ は、 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

の三角定規の形
 二つに分割でき
 て、



$$OH = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 6 = 2\sqrt{3},$$

$$OA = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

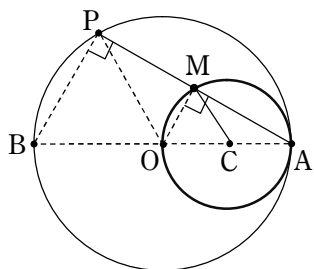
軌跡に囲まれる図形のうち、直線 AB より上の部分は、半径 $4\sqrt{3}$ 、中心角 120° の扇形 OAB から、 $\triangle OAB$ を除いたものなので、面積は

$$\begin{aligned} & \left(4\sqrt{3}\right)^2 \times \pi \times \frac{120^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \times 12 \times 2\sqrt{3} \\ &= 16\pi - 12\sqrt{3} \end{aligned}$$

AB より下の部分も同じ面積なので、求める図形の面積 S は

$$S = 2 \left(16\pi - 12\sqrt{3} \right) = \boxed{32\pi - 24\sqrt{3}}$$

H1.2



AB が円 O の直径となるように点 B を取る。
P が A と一致するとき、M も A と一致する。
また、P が B と一致するとき、M は O と一致する。

解1 P が A, B と一致していないとき、
 $AO = \frac{1}{2}AB, \quad AM = \frac{1}{2}AP \quad \dots\dots\dots ①$

だから、中点連結定理より、

$$OM \parallel BP$$

したがって、

$$\begin{aligned} \angle AMO &= \angle APB \quad (\text{同位角}) \quad \dots\dots\dots ② \\ &= 90^\circ \quad (\text{円周角の定理}) \end{aligned}$$

よって、M の軌跡は

OA を直径とする円

である。

解2 OA の中点を C とする。
P が A, B と一致していないとき、

$$AC = \frac{1}{2}AO, \quad AM = \frac{1}{2}AP \quad \dots\dots\dots ③$$

だから、中点連結定理より、

$$CM = \frac{1}{2}OP = \frac{1}{2} \times (\text{円 O の半径}) \quad \dots\dots\dots ④$$

よって、よって、M の軌跡は

OA の中点が中心、半径が円 O の $\frac{1}{2}$ 倍の円

である。

※ ①から、 $\triangle AOM$ は $\triangle ABP$ の A を中心とした $\frac{1}{2}$ 倍の相似拡大であるから、②が分かる、としてもよい。また、③から $\triangle ACM$ は $\triangle AOP$ の A を中心とした $\frac{1}{2}$ 倍の相似拡大であるから、④が分かる、としてもよい。

※ 結局、円 O の A を中心とした $\frac{1}{2}$ 倍の相似拡大が、半径 $\frac{1}{2}$ 倍の円であると示されたことになる。