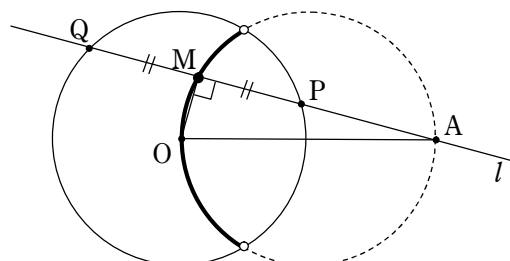


中2数学C 2019年度冬期 宿題解答

§2 軌跡の応用問題

H2.1

(1)



Mは円Oの弦PQの中点だから、

$$OM \perp PQ$$

よって、

$$\angle OMA = 90^\circ$$

であるから、MはOAを直径とする円周上にある。lが円Oと交点をもつように動くとき、Mはその円周上でかつ円Oの内部にある部分をくまなく動く。

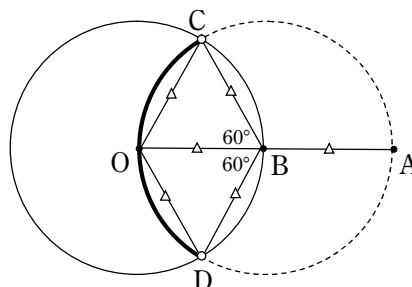
以上より、Mの軌跡は

OAを直径とする円周のうち、

円Oの内部にある円弧

である。

(2)



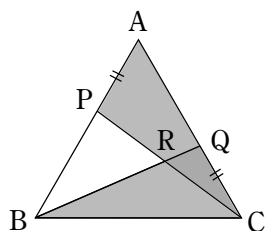
円Oの半径が4で、 $AO=8$ だから、Mの軌跡の円弧の半径は円Oの半径と一致している。また、その中心BはOAの中点である。よって、図のように点C、Dをとると、 $\triangle OBC$ 、 $\triangle OBD$ はともに正三角形で、

$$\angle CBD = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$$

したがって、Mの軌跡の長さは

$$2 \times \pi \times 4 \times \frac{120^\circ}{360^\circ} = \boxed{\frac{8}{3}\pi}$$

H2.2



[仮定]

$\triangle ABC$ は正三角形……………①

$AP = CQ$ ……………②

$\triangle ACP$ と $\triangle CBQ$ において、①より

$AC = CB$, $\angle PAC = \angle QCB$

だから、②と合わせて

$\triangle ACP \equiv \triangle CBQ$ (二辺夾角相等)

よって、

$\angle ACP = \angle CBQ$ (対応角) ……………③

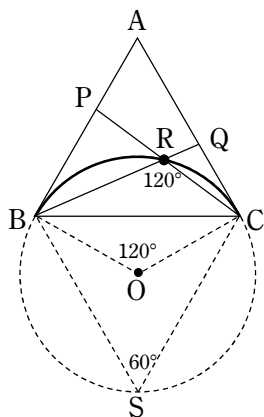
ここで、 $\triangle BCR$ の内角和を考え、

$$\begin{aligned}\angle BRC &= 180^\circ - \angle CBQ - \angle BCP \\ &= 180^\circ - \angle ACP - \angle BCP \quad (\because \text{③}) \\ &= 180^\circ - \angle ACB\end{aligned}$$

$$= 180^\circ - 60^\circ \quad (\because \text{①})$$

$\therefore \angle BRC = 120^\circ$ (一定)

したがって、 R の軌跡は次の図の太線のような円弧となる。



この円弧の中心を O とし、円 O 上、直線 BC よりも下の部分に、点 S を取ると、内接四角形の定理より

$$\angle BSC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

よって、円周角の定理より、

$$\angle BOC = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$$

O から BC に垂線 OH

を引くと、 $\triangle OBC$ は、

$30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の三角

定規の形二つに分割

できて、

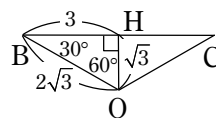
$$OH = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 3 = \sqrt{3},$$

$$OB = 2OH = 2\sqrt{3}$$

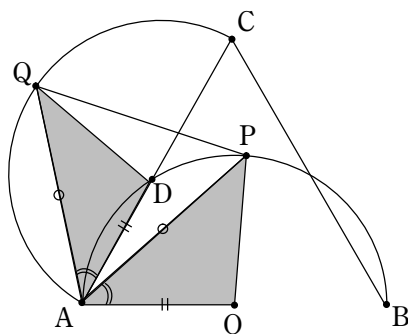
R の軌跡と BC が囲む図形は、半径 $2\sqrt{3}$, 中心角 120° の扇形 OBC から、 $\triangle OBC$ を除いたものなので、面積は

$$(2\sqrt{3})^2 \times \pi \times \frac{120^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{3}$$

$$= \boxed{4\pi - 3\sqrt{3}}$$



H2.3



直線 AB に関して半円 O と同じ側に、

$\triangle ABC$ が正三角形 ①

となるように点 C を取り、AC の中点を D とする。

$\triangle DAQ$ と $\triangle OAP$ において、

$AD = \frac{1}{2}AC$, $AO = \frac{1}{2}AB$ で、①より $AC = AB$ だから、

$AD = AO$ ②

また、

$\triangle APQ$ は正三角形 ③

だから、

$AQ = AP$ ④

さらに、P が弧 AD 上にあるときは、

$$\begin{aligned}\angle DAQ &= \angle PAQ + \angle PAC \\ &= 60^\circ + \angle PAC \quad (\because \text{③})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle OAP &= \angle BAC + \angle PAC \\ &= 60^\circ + \angle PAC \quad (\because \text{①})\end{aligned}$$

P が弧 DB 上にあるときは、

$$\begin{aligned}\angle DAQ &= \angle PAQ - \angle PAC \\ &= 60^\circ - \angle PAC \quad (\because \text{③})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle OAP &= \angle BAC - \angle PAC \\ &= 60^\circ - \angle PAC \quad (\because \text{①})\end{aligned}$$

いずれにしても、

$\angle DAQ = \angle OAP$ ⑤

②, ④, ⑤より

$\triangle DAQ \equiv \triangle OAP$ (二辺夾角相等)

したがって、

$$\begin{aligned}DQ &= OP \text{ (対応辺)} \\ &= 2\end{aligned}$$

であり、Q は D を中心とした半径 2 の円周上にある。また P が半円 O の周上を A から B

まで動くとき、Q は円 D の周上を A から C まで動く。

以上より、Q の軌跡は、点 D を中心とした図のような半径 2 の半円で、その長さは

$$2 \times 2 \times \pi \times \frac{1}{2} = \boxed{2\pi}$$

※ ほぼ同様にして、 $\triangle CAQ \equiv \triangle BAP$ を示すこともできる。この場合、対応角を考え、
 $\angle AQC = \angle APB = 90^\circ$

から、Q の軌跡が AC を直径とする円の一部であることが分かる。

別解 (略解)

$\triangle OAQ \equiv \triangle OPQ$ (三辺相等)

により、

$$\angle AQO = \angle PQO$$

だから、

$$\angle AQO = \frac{1}{2} \angle AQP = 30^\circ \text{ (一定)}$$

したがって、Q の軌跡が図の円弧 AC であると分かる。(この方法だと、P が弧 AD 上にあるか弧 DB にあるかで場合分けしなくて済む。)さらに、この軌跡を含む円において円周角の定理を用いて、

$$\angle OQC = \angle OAC = 60^\circ$$

だから、

$$\angle AQC = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$$

よって、Q の軌跡の円弧 AC は、AC を直径とする半円だと分かり、その長さは

$$2 \times 2 \times \pi \times \frac{1}{2} = \boxed{2\pi}$$

※ ③より、Q は A を中心として P を 60° 回転した点とみることもできる。よって、その軌跡は、P の軌跡である半円 O を、A を中心として 60° 回転した半円 (もとの半円と合同) になる。