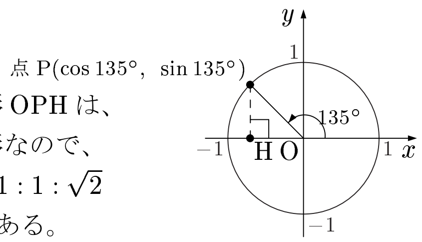
－ 中3C　宿題プリント (1学期-3)　解答－

宿題 3-1

(1)　$\cos 135°$, $\sin 135°$ の値を求めよ。

(2)　$0° \leqq \theta < 360°$ の範囲で、$\cos\theta = \frac{1}{2}$ となる θ をすべて求めよ。

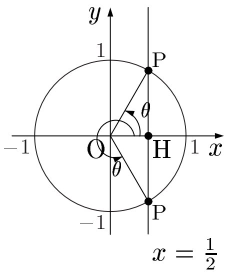
(1)



右図の直角三角形 OPH は、
直角二等辺三角形なので、
$\mathrm{OH} : \mathrm{PH} : \mathrm{OP} = 1 : 1 : \sqrt{2}$
$= \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{1}{\sqrt{2}} : 1$ である。
したがって、$\mathrm{P}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ であり、

$$\cos 135° = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{2}}},\quad \sin 135° = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

(2)



右図の直角三角形 OPH で、
$\mathrm{OH} : \mathrm{OP} = \frac{1}{2} : 1 = 1 : 2$
なので、これは $30°, 60°, 90°$ の
直角三角形。
したがって、$\theta = \boxed{60°,\ 300°}$

宿題 3-2

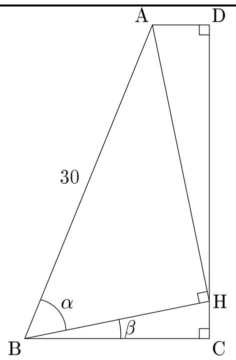
右図の台形 ABCD において、
$\mathrm{AB} = 30$, $\angle\mathrm{ADC} = \angle\mathrm{BCD} = 90°$ である。
辺 CD 上に $\angle\mathrm{AHB} = 90°$ となる点 H を取ると、
$\alpha = \angle\mathrm{ABH}$, $\beta = \angle\mathrm{CBH}$ はともに鋭角であり、
$\sin\alpha = \frac{5}{6}$, $\sin\beta = \frac{1}{5}$ となった。

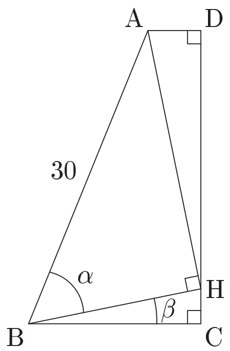
(1)　$\cos\alpha$, $\cos\beta$ の値を求めよ。

(2)　$\angle\mathrm{AHD}$ の大きさを α, β のうち必要なものを用いて表せ。

(3)　AH, BH の長さをそれぞれ求めよ。

(4)　AD, BC の長さをそれぞれ求めよ。





(1) α, β は鋭角なので、cos の値は正。

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - (\sin\alpha)^2} = \boxed{\frac{\sqrt{11}}{6}}$$

$$\cos\beta = \sqrt{1 - (\sin\beta)^2} = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{5}}$$

(2) $\triangle\mathrm{BCH}$ の外角 BHD に注目し、
$\angle\mathrm{BCH} + \angle\mathrm{CBH} = \angle\mathrm{BHA} + \angle\mathrm{AHD}$
$\therefore \angle\mathrm{AHD} = 90° + \beta - 90° = \boxed{\beta}$

(3) 直角三角形 ABH に注目し、

$$\mathrm{AH} = \mathrm{AB}\sin\alpha = 30 \cdot \frac{5}{6} = \boxed{25}$$

$$\mathrm{BH} = \mathrm{AB}\cos\alpha = 30 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = \boxed{5\sqrt{11}}$$

(4) 直角三角形 ADH に注目し、

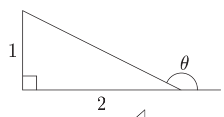
$$\mathrm{AD} = \mathrm{AH}\sin\beta = 25 \cdot \frac{1}{5} = \boxed{5}$$

直角三角形 BCH に注目し、

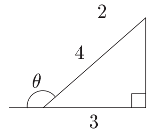
$$\mathrm{BC} = \mathrm{BH}\cos\beta = 5\sqrt{11} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = \boxed{2\sqrt{66}}$$

宿題 3-3

(1)　右図の角 θ について、$\cos\theta$, $\sin\theta$ の値をそれぞれ求めよ。



(2)　右図の角 θ について、$\cos\theta$, $\sin\theta$ の値をそれぞれ求めよ。



(1)　斜辺の長さは $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$$\cos\theta = \boxed{-\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

$$\sin\theta = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

(2)　高さは $\sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$

$$\cos\theta = \boxed{-\frac{3}{4}}$$

$$\sin\theta = \boxed{\frac{\sqrt{7}}{4}}$$

宿題 3-4

どの目も出やすさが等しいサイコロを 4 回振る。以下の確率を求めよ。

(1) 出る目がすべて 4 以下である

(2) 出る目の最大値が 4 である

(3) 出る目の最大値が 4 であり、かつ、出る目の最小値が 2 である

(1) 「出る目が 4 回とも 4 以下」である確率は

$$\left(\frac{4}{6}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \boxed{\frac{16}{81}}$$

(2) 「出る目の最大値が 4」であるのは「出る目が 4 回とも 4 以下」から、「出る目が 4 回とも 3 以下」を除いたケース。

その確率は

$$\left(\frac{4}{6}\right)^4 - \left(\frac{3}{6}\right)^4 = \frac{4^4-3^4}{6^4} = \boxed{\frac{175}{1296}}$$

(3) 出る目が 4 回とも 2,3,4 のいずれかを前提とする。

このとき、3^4 通りの目の出方を

	最大値が 4 である	最大値が 4 でない
最小値が 2 である	ア	イ
最小値が 2 でない	ウ	エ

上表のように分類すると、

アまたはウの目の出方は、$3^4-2^4=65$ 通り。

ウの目の出方は、$2^4-1^4=15$ 通り。

よって、アの目の出方は $65-15=50$ 通り。

よって、求める確率は

$$\frac{50}{6^4} = \boxed{\frac{25}{648}}$$

別解　出る目の組み合わせとしてありうるのは $\{2,4,4,4\}\{2,2,4,4\}\{2,3,4,4\}\{2,2,2,4\}\{2,2,3,4\}$ $\{2,3,3,4\}$ の 6 タイプ。それぞれの目の出方が何通りかを数えて合計する、という方針でも良い。

宿題 3-5

A,B,C,D,E,F,G,H,I の 9 人を次のような人数で 3 組に分ける方法の総数を求めよ。

(1) 4 人、3 人、2 人

(2) 5 人、2 人、2 人

(3) 3 人、3 人、3 人

(1) 9 人から 4 人を選んで組を作り ($_9C_4$ 通り)、残り 5 人から 3 人を選んで組を作り ($_5C_3$ 通り)、残り 2 人で組を作る (1 通り) と考えると、分け方の総数は

$$_9C_4 \times {}_5C_3 = \frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1} \times \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = \boxed{1260}$$

(2) まずは 2 人の組 2 つをアとイと区別して分け方を数える。

9 人からア組に入る 2 人を選び ($_9C_2$ 通り)、残り 7 人からイ組に入る 2 人を選び ($_7C_2$ 通り)、残り 5 人で組を作る (1 通り) と考えると、

$_9C_2 \times {}_7C_2 = \dfrac{9\times8}{2\times1} \times \dfrac{7\times6}{2\times1} = 756$ 通り。

実際にはア組・イ組と区別をつけないので、ア組とイ組が入れ替わっただけの 2 つの分け方は同じである。

よって、求める分け方の総数は、$756 \div 2 = \boxed{378}$

(3) 3 人の組 3 つをア・イ・ウと区別して分け方を数える。

まず、9 人からア組に入る 3 人を選び ($_9C_3$ 通り)、残り 6 人からイ組に入る 3 人を選び ($_6C_3$ 通り)、残り 3 人でウ組を作る (1 通り) と考えると、

$_9C_3 \times {}_6C_3 = \dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1} \times \dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 1680$ 通り。

実際にはア組・イ組・ウ組と区別をつけないので、6 通り (ア, イ, ウの並べ方) が同じ分け方である。

よって、求める分け方の総数は、$1680 \div 6 = \boxed{280}$

宿題 3-6

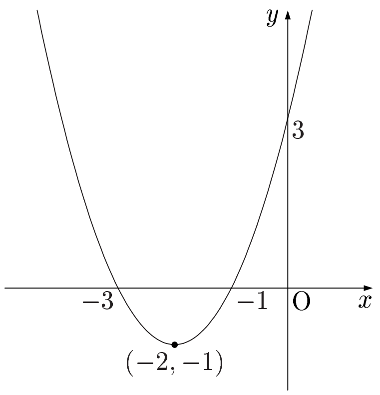
次の 2 次関数のグラフを描け。
(頂点の座標、x 切片、y 切片も明記すること。)

(1) $y = x^2 + 4x + 3$

(2) $y = -2x^2 + x + 1$

(3) $y = (-3x + 6)^2$

(1) $y = x^2 + 4x + 3 = (x + 2)^2 - 1$ と平方完成できるので、グラフは $(-2, -1)$ を頂点とする下に凸な放物線。
x 切片は $y = 0$ となる x の値を求めて、
$x^2 + 4x + 3 = 0$
$(x + 1)(x + 3) = 0$
$x = -1, -3$
以上より、$y = x^2 + 4x + 3$ のグラフは下図のよう。



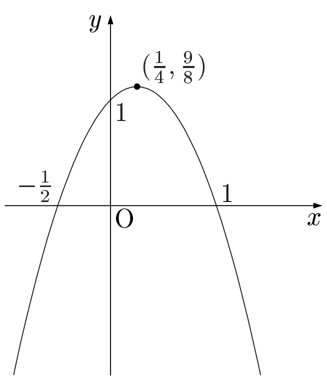
(2) $y = -2x^2 + x + 1 = -2\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) + 1$

$= -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1$

$= -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$

と平方完成できるので、グラフは $\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{8}\right)$ を頂点とする上に凸な放物線。

x 切片は $y = 0$ となる x の値を求めて、
$0 = -2x^2 + x + 1$
$2x^2 - x - 1 = 0$
$(x - 1)(2x + 1) = 0$
$x = 1, -\frac{1}{2}$
以上より、$y = -2x^2 + x + 1$ のグラフは下図のよう。



(3) $y = (-3x + 6)^2 = 9(x - 2)^2$ と変形できるので、グラフは $(2, 0)$ を頂点とする下に凸な放物線。

よって、$y = (-3x + 6)^2$ のグラフは下図のよう。