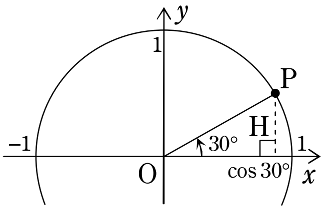
中3数学D　宿題解答　1学期-1

宿題 1-1

(1)　下図の直角三角形 POH は$30°, 60°, 90°$の三角定規の形なので,

$$\mathrm{PO}:\mathrm{OH}=2:\sqrt{3} \qquad \therefore \mathrm{OH}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

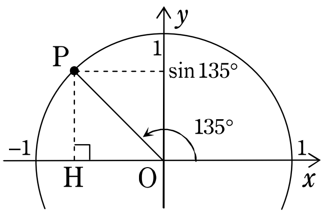
したがって, $\cos 30° = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$



(2)　下図の直角三角形 POH は直角二等辺三角形なので,

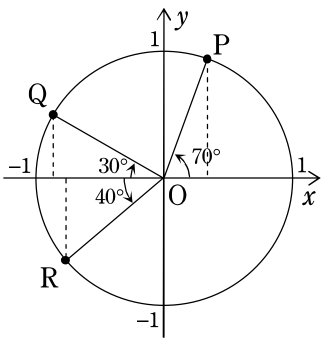
$$\mathrm{PO}:\mathrm{PH}=\sqrt{2}:1 \qquad \therefore \mathrm{PH}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって, $\sin 135° = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$



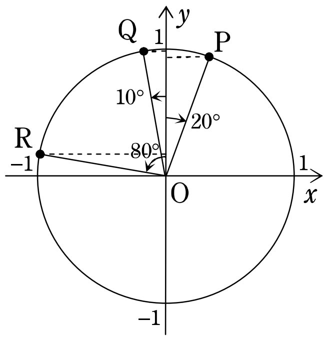
(3)　$\cos 70°, \cos 150°, \cos 220°$ はそれぞれ下図 P, Q, R の x 座標なので,

$$\boxed{\cos 150° < \cos 220° < \cos 70°}$$



(4)　$\sin 70°, \sin 100°, \sin 170°$ はそれぞれ下図 P, Q, R の y 座標なので,

$$\boxed{\sin 170° < \sin 70° < \sin 100°}$$



宿題 1-2

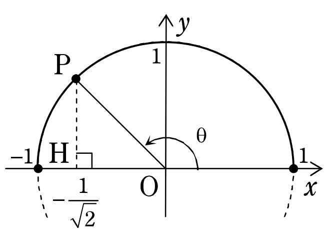
(1)　$0° \leqq \theta \leqq 180°$, $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より, θ は下図の角度となる.

図の直角三角形 POH において

$$\mathrm{PO}:\mathrm{OH}=1:\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}:1$$

なので, 三角形 POH は直角二等辺三角形であり, $\angle\mathrm{POH}=45°$.

よって, $\theta = \boxed{135°}$



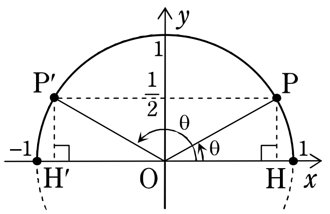
(2)　$0° \leqq \theta \leqq 180°$, $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ より, θ は下図のいずれかの角度となる.

図の直角三角形 POH において

$$\mathrm{PO}:\mathrm{PH}=1:\frac{1}{2}=2:1$$

なので, 三角形 POH は$30°, 60°, 90°$の三

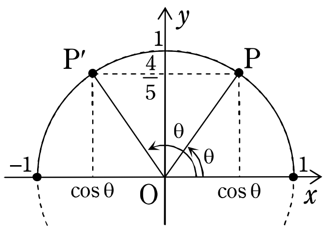
角定規の形であり，$\angle \mathrm{POH} = 30^\circ$．
P と P′ は y 軸に関して線対称なので，
$\angle \mathrm{P'OH'} = 30^\circ$．
よって，$\theta = \boxed{30^\circ, 150^\circ}$



(3) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$，$\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ より，θ は下図のいずれかの角度となる．
$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$ であるから，

$$(\cos\theta)^2 = 1 - (\sin\theta)^2 = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$\therefore \cos\theta = \boxed{\pm\frac{3}{5}}$$



宿題 1-3

$(\cos\theta)^2 = \sin\theta$ ……………………… ①

(1) $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$ であるから，①は

$$1 - (\sin\theta)^2 = \sin\theta$$

$$\therefore 0 = (\sin\theta)^2 + \sin\theta - 1$$

と言い直せる．
したがって，$t = \sin\theta$ は，2 次方程式

$\boxed{t^2 + t - 1 = 0}$ ……………………… ②

を満たす．

(2) ②を解くと，

$$\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$t + \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore t = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$\sin\theta$ の値は $-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ の範囲にあるので，このうち $\sin\theta$ の値として適切なのは，

$$\sin\theta = \boxed{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

宿題 1-4

(1) $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \boxed{\dfrac{2}{27}}$

(2) 表がちょうど 1 回出るのは
a) 表，裏，裏
b) 裏，表，裏
c) 裏，裏，表
のいずれかの順で出たときである．
いずれの場合も，その順番に出る確率は

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

なので，表がちょうど 1 回出る確率は

$$\frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{2}{27} \times 3 = \boxed{\frac{2}{9}}$$

(3) 表と裏がちょうど 2 回ずつ出るのは
a) 表，表，裏，裏
b) 表，裏，表，裏
c) 表，裏，裏，表
d) 裏，表，表，裏
e) 裏，表，裏，表
f) 裏，裏，表，表
のいずれかの順で出たときである．
いずれの場合も，その順番に出る確率は

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{81}$$

なので，表と裏がちょうど 2 回ずつ出る確率は

$$\frac{4}{81} \times 6 = \boxed{\frac{8}{27}}$$

宿題 1-5

(1)　百，十，一の位の順に見ていくと，

百の位の数　　1 から 9 の 9 通り

十の位の数　　0 から 9 の 10 通り

一の位の数　　0 から 9 の 10 通り

なので，3 桁の自然数の総数は

$9 \times 10 \times 10 = \boxed{900}$

※　100 から 999 までの 900 個としてもよい．

(2)　百，十，一の位の順に見ていくと，

百の位の数

1 から 9 の 9 通り

十の位の数

0 から 9 のうち，百の位の数と異なるもので，9 通り

一の位の数

0 から 9 のうち，百の位，十の位の数と異なるもので，8 通り

なので，各桁の数が異なる 3 桁の自然数の総数は

$9 \times 9 \times 8 = \boxed{648}$

(3)　2 通りの解法を紹介する．

［解法 A］

偶数であるための条件は，一の位の数が偶数であることである．

一，百，十の位の順に見ていくと，

a)　<u>一の位の数が 0 でないもの</u>

一の位の数

2, 4, 6, 8 の 4 通り

百の位の数

1 から 9 のうち，一の位の数と異なるもので，8 通り

十の位の数

0 から 9 のうち，一の位，百の位の数と異なるもので，8 通り

なので，$4 \times 8 \times 8 = 256$ 個．

b)　<u>一の位の数が 0 のもの</u>

百の位の数

1 から 9 の，9 通り

十の位の数

1 から 9 のうち，百の位の数と異なるもので，8 通り

なので，$9 \times 8 = 72$ 個．

したがって，偶数であるものの総数は

$256 + 72 = \boxed{328}$

［解法 B］

各桁の数が異なる自然数のうち，偶数でないもの，すなわち奇数であるものを数える．

奇数であるための条件は，一の位の数が奇数であることであるから，一，百，十の位の順に見ていくと，

一の位の数

1, 3, 5, 7, 9 の 5 通り

百の位の数

1 から 9 のうち，一の位の数と異なるもので，8 通り

十の位の数

0 から 9 のうち，一の位，百の位の数と異なるもので，8 通り

なので，各桁の数が異なる 3 桁の自然数のうち，奇数であるものの総数は

$5 \times 8 \times 8 = 320$

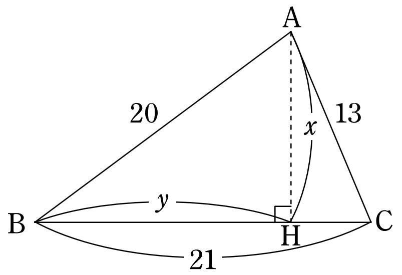
各桁の数が異なる 3 桁の自然数は，(2)より 648 個なので，偶数であるものの総数は

$648 - 320 = \boxed{328}$

宿題 1-6

(1)　$AH=x,\ BH=y$ とおくと,

$CH=BC-BH=21-y$



三角形 ABH でピタゴラスの定理より

$AH^2+BH^2=AB^2$

$\therefore\ x^2+y^2=400$ ………………………… ①

三角形 ACH でピタゴラスの定理より

$AH^2+CH^2=AC^2$

$\therefore\ x^2+(21-y)^2=169$ ……………………… ②

① − ② より

$y^2-(21-y)^2=231$

$y^2-(441-42y+y^2)=231$

$42y=672$

$\therefore\ y=16$

したがって,　$BH=\boxed{16}$

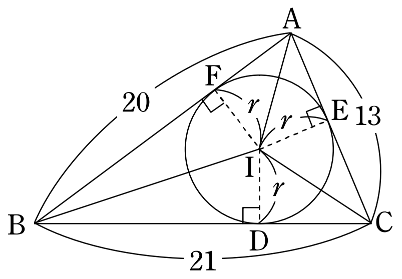
(2)　$y=16$ なので,①より

$x^2=400-16^2=144\quad \therefore\ x=12\ (>0)$

よって,

$$S=\frac{1}{2}\times BC\times AH=\frac{1}{2}\times 21\times 12=\boxed{126}$$

(3)　三角形 ABC の内心を I とし, 内接円と辺 BC, CA, AB との接点をそれぞれ D, E, F とすると, ID, IE, IF はそれぞれ辺 BC, CA, AB と垂直である.



したがって,三角形 ABC の面積 S は,内接円の半径 r を用いて

$$S=\triangle IBC+\triangle ICA+\triangle IAB$$

$$=\frac{1}{2}\times 21\times r+\frac{1}{2}\times 13\times r+\frac{1}{2}\times 20\times r$$

$$=\frac{1}{2}\times(21+13+20)\times r=27r$$

と表すことができる.

(2)より,$S=126$ なので,

$$27r=126\qquad \therefore\ r=\boxed{\frac{14}{3}}$$