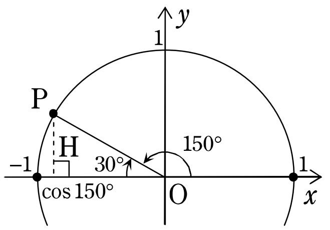
中3数学D　宿題解答　1学期-2

宿題 2-1

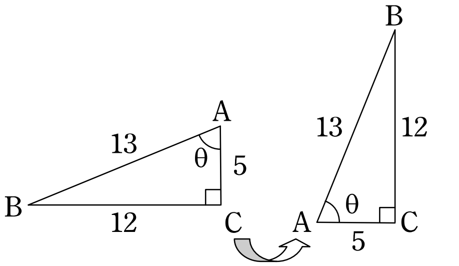
(1)　下図の直角三角形 POH は30°, 60°, 90°の三角定規の形なので,



$$\mathrm{PO}:\mathrm{OH}=2:\sqrt{3} \quad \therefore \mathrm{OH}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

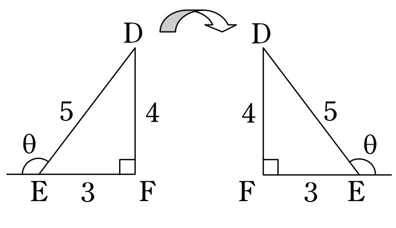
したがって，$\cos 150° = \boxed{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

(2)



$$\cos\theta=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\boxed{\frac{5}{13}},\ \sin\theta=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\boxed{\frac{12}{13}}$$

(3)



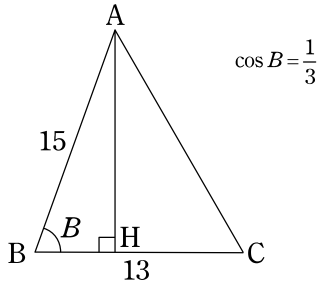
$$\cos\theta=-\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{DE}}=\boxed{-\frac{3}{5}},\ \sin\theta=\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{DE}}=\boxed{\frac{4}{5}}$$

宿題 2-2

(1)　B は三角形の内角なので $0°<B<180°$ を満たし，$\sin B>0$.
また，$(\cos B)^2+(\sin B)^2=1$ より，

$$(\sin B)^2=1-(\cos B)^2=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

よって，$\sin B=\boxed{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$.



(2)　A から BC に下した垂線の足を H とする.

$$\mathrm{AH}=\mathrm{AB}\sin B=15\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=10\sqrt{2}$$

$$\therefore S=\frac{1}{2}\times\mathrm{BC}\times\mathrm{AH}$$

$$=\frac{1}{2}\times13\times10\sqrt{2}=\boxed{65\sqrt{2}}$$

(3)　(2)より，$\mathrm{AH}=10\sqrt{2}$.
また,

$$\mathrm{BH}=\mathrm{AB}\cos B=15\times\frac{1}{3}=5$$

$\therefore \mathrm{CH}=\mathrm{BC}-\mathrm{BH}=13-5=8$

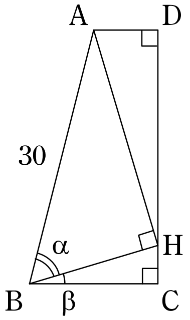
よって，直角三角形 ACH でピタゴラスの定理より,

$$\mathrm{CA}^2=\mathrm{AH}^2+\mathrm{CH}^2$$

$$=(10\sqrt{2})^2+8^2=264$$

$\therefore \mathrm{CA}=\boxed{2\sqrt{66}}\ (>0)$

宿題 2-3



$\sin\alpha = \dfrac{5}{6}$

$\sin\beta = \dfrac{1}{5}$

(1)　α は鋭角であるから，$\cos\alpha > 0$.
　また，$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$ より，

$$(\cos\alpha)^2 = 1 - (\sin\alpha)^2 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}$$

　よって，$\cos\alpha = \boxed{\dfrac{\sqrt{11}}{6}}$.

　同様にして，$\cos\beta = \boxed{\dfrac{2\sqrt{6}}{5}}$.

(2)　三角形 BCH の外角 BHD に注目して

$$\angle BCH + \angle CBH = \angle BHA + \angle AHD$$

$$\therefore \angle AHD = \angle BCH + \angle CBH - \angle BHA$$

$$= 90^\circ + \beta - 90^\circ = \boxed{\beta}$$

(3)　$BH = AB\cos\alpha = 30 \times \dfrac{\sqrt{11}}{6} = 5\sqrt{11}$ なので，

$$BC = BH\cos\beta = 5\sqrt{11} \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = \boxed{2\sqrt{66}}$$

$$CH = BH\sin\beta = 5\sqrt{11} \times \frac{1}{5} = \boxed{\sqrt{11}}$$

　$AH = AB\sin\alpha = 30 \times \dfrac{5}{6} = 25$ なので，

$$HD = AH\cos\beta = 25 \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = \boxed{10\sqrt{6}}$$

$$DA = AH\sin\beta = 25 \times \frac{1}{5} = \boxed{5}$$

宿題 2-4

(1)　　A :「1 の目が 1 回以上出る」
　の余事象 $\overline{A}$ は「1 の目が出ない」，すなわち「4 回とも 2 から 8 のいずれかの目が出る」という事象なので，

$$P(\overline{A}) = \frac{7}{8} \times \frac{7}{8} \times \frac{7}{8} \times \frac{7}{8} = \frac{7^4}{2^{12}} = \frac{2401}{4096}$$

　よって，求める A の確率は

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{2401}{4096} = \boxed{\frac{1695}{4096}}$$

(2)　「1 の目が 2 回以上出る」という事象は，
　(1)の「1 の目が 1 回以上出る」から，
　　B :「1 の目がちょうど 1 回出る」
　を除いた事象であるから，確率は
　　$P(A) - P(B)$
　である．
　1 の目がちょうど 1 回出るのは，
　　あ）1，1 以外，1 以外，1 以外
　　い）1 以外，1，1 以外，1 以外
　　う）1 以外，1 以外，1，1 以外
　　え）1 以外，1 以外，1 以外，1
　のいずれかの順番で出るときであり，いずれの場合も，その順番で目が出る確率は

$$\frac{1}{8} \times \frac{7}{8} \times \frac{7}{8} \times \frac{7}{8} = \frac{343}{4096}$$

　であるから，

$$P(B) = \frac{343}{4096} \times 4 = \frac{1372}{4096}$$

　よって，求める確率は

$$P(A) - P(B) = \frac{1695}{4096} - \frac{1372}{4096} = \boxed{\frac{323}{4096}}$$

宿題 2-5

(1)　［考え方①］

4 人の組 A，3 人の組 B，2 人の組 C に分けるとする．9 人それぞれをどの組に分けるかを並べると，組み分けの方法は，A を 4 文字，B を 3 文字，C を 2 文字並べてできる記号列として表せるので，このような記号列を数えればよい．記号列の総数は，

$$\frac{9\times8\times7\times\cancel{6}\times5\times\cancel{4\times3\times2\times1}}{\cancel{4\times3\times2\times1}\times\cancel{3\times2}\times1\times2\times1}=\boxed{1260}$$

［考え方②］

まず，9 人から 4 人を選んで組を作り，残り 5 人から 3 人を選んで組を作り，残りの 2 人で組を作る，と考えると，分け方の総数は

$$ {}_9C_4\times{}_5C_3=\frac{9\times8\times7\times6}{\cancel{4\times3}\times2\times1}\times\frac{5\times\cancel{4\times3}}{3\times2\times1}$$
$$=\boxed{1260}$$

※　考え方②では，人数の少ない組から選んでいく方が式の形は簡単になる．

ここでは, 2 人, 3 人, 4 人の順に選ぶと,

$$ {}_9C_2\times{}_7C_3=\frac{9\times8}{2\times1}\times\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}$$

のようになり，上の解法での 4×3 の部分を約分した形からはじめられる．

以下の(2), (3)では，(1)の［考え方①］の方法のみを述べることにする．

(2)　5 人の組 A と 2 人の組 B, C に分けるとすると，組み分けの総数は，A を 5 文字，B を 2 文字，C を 2 文字並べてできる記号列の総数だけあり，

$$\frac{9\times\overset{2}{\cancel{8}}\times7\times6\times\cancel{5\times4\times3\times2\times1}}{\cancel{5\times4\times3\times2\times1}\times\cancel{2\times1\times1}\times2\times1}=756$$

通りである．

実際には，2 人組ふたつは区別しないので，上の方法ではふたつの 2 人組のどちらを B に，どちらを C にするかで，求める組み分けの総数を 2 倍に重複して数えていることになる．

よって，求める組み分けの総数は

$$756\times\frac{1}{2}=\boxed{378}$$

(3)　3 人の組 A, B, C に分けるとすると，組み分けの総数は，A, B, C を 3 文字ずつ並べてできる記号列の総数だけあり，

$$\frac{\overset{12}{\cancel{9\times8}}\times7\times\cancel{6}\times5\times4\times\cancel{3\times2\times1}}{\cancel{3\times2\times1}\times\cancel{3\times2}\times1\times\cancel{3\times2}\times1}=1680$$

通りである．

実際には，3 人組みっつは区別しないので，上の方法ではみっつの 3 人組のどれを A, B, C にするかで，求める組み分けの総数を，$3\times2\times1=6$ 倍に重複して数えていることになる．

よって，求める組み分けの総数は

$$1680\times\frac{1}{6}=\boxed{280}$$

宿題 2-6

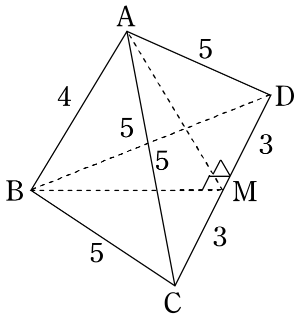
CDの中点をMとおくと，

$AM \perp CD,\ BM \perp CD$ ……………………………… ①

であるから，CDは平面ABMと垂直である．したがって，三角錐D-ABM, C-ABMの，面ABMを底面としたときの高さは，それぞれDM, CMであり，A-BCDの体積Vは，D-ABMとC-ABMの体積の和として，

$$V = \frac{1}{3} \times \triangle ABM \times DM + \frac{1}{3} \times \triangle ABM \times CM$$
$$= \frac{1}{3} \times \triangle ABM \times (DM + CM)$$
$$= \frac{1}{3} \times \triangle ABM \times CD$$

と計算できる．



直角三角形ADM，直角三角形BDMでピタゴラスの定理より，

$$AM^2 = BM^2 = 5^2 - 3^2 = 16$$

$\therefore AM = BM = 4$

なので，三角形ABMは1辺の長さ4の正三角形であるから，面積は

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

となるので，

$$V = \frac{1}{3} \times 4\sqrt{3} \times 6 = \boxed{8\sqrt{3}}$$

※ Aから面BCDに下した垂線の足をHとすると，斜辺一辺相等で$\triangle ACH \equiv \triangle ADH$なので，$CH = DH$であるから，HはCDの垂直二等分線BM上にあることが分かる．つまり，AからBMに下した垂線の足がHに他ならない．このことを利用して，A-BCDの，面BCDを底面としたときの高さを求めてもよい．