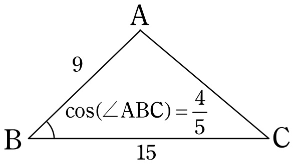
中3数学D　宿題解答　1学期-3

宿題 3-1

(1)　三角形 ABC において，余弦定理より，

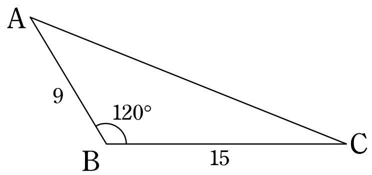


$$CA^2=9^2+15^2-2\times9\times15\times\underbrace{\cos(\angle ABC)}_{\frac{4}{5}}$$

$$=81+225-216=90$$

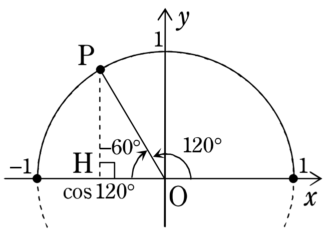
$\therefore CA=\boxed{3\sqrt{10}}\ (>0)$

(2)　三角形 ABC において，余弦定理より，



$$CA^2=9^2+15^2-2\times9\times15\times\cos120^\circ$$

下図の直角三角形 POH は $30^\circ,\ 60^\circ,\ 90^\circ$ の三角定規の形なので，



$PO:OH=2:1\quad\therefore OH=\dfrac{1}{2}$

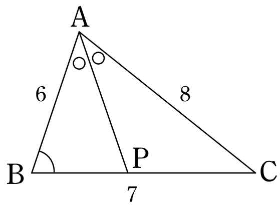
したがって，$\cos120^\circ=-\dfrac{1}{2}$ であり，

$$CA^2=81+225-2\times9\times15\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=81+225+135=441$$

$\therefore CA=\boxed{21}\ (>0)$

宿題 3-2



(1)　AP は∠BAC の二等分線なので，角の二等分線と比の定理より，

$$BP:CP=BA:CA=6:8=3:4$$

$$\therefore BP=\frac{3}{3+4}\times BC=\frac{3}{7}\times7=\boxed{3}$$

(2)　三角形 ABC において，余弦定理より，

$$8^2=6^2+7^2-2\times6\times7\times\cos(\angle ABC)$$

$$\therefore \cos(\angle ABC)=\frac{21}{2\times6\times7}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

(3)　三角形 ABP において，余弦定理より，

$$AP^2=6^2+3^2-2\times6\times3\times\underbrace{\cos(\angle ABP)}_{\cos(\angle ABC)=\frac{1}{4}}$$

$$=36+9-9=36$$

$\therefore AP=\boxed{6}\ (>0)$

※　余弦定理の基本形

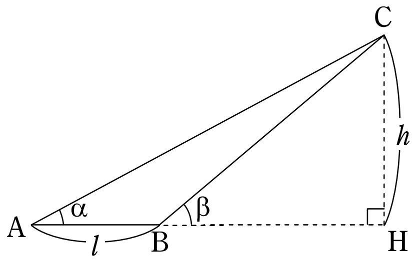
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

は合同条件「二辺夾角相等」を体現する式です．これを変形した式

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

も，合同条件「三辺相等」を体現する，①と同じくらい大事な形の式なので，②の形でも使えるようになってしまうのもよいでしょう．

宿題 3-3



(1) $\mathrm{AH} = \mathrm{AC} \times \cos\alpha$

$$= \left(\mathrm{CH} \times \frac{1}{\sin\alpha}\right) \times \cos\alpha = \boxed{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} h}$$

(2) 同様に,

$$\mathrm{BH} = \left(\mathrm{CH} \times \frac{1}{\sin\beta}\right) \times \cos\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} h$$

なので, $\mathrm{AB} = \mathrm{AH} - \mathrm{BH}$ より,

$$l = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} h - \frac{\cos\beta}{\sin\beta} h$$

これを h について解くと,

$$\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right) h = l$$

$$\frac{\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} h = l$$

（$l \neq 0$ より

$\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \neq 0$

なので,）

$$h = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta} l$$

よって, $\mathrm{CH} = \boxed{\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta} l}$.

※ §6 まで学習が進んだら，この分母を改めて見直してみよう.

宿題 3-4

(1) 「5 回とも赤か青いずれかの球を取り出す」確率なので,

$$\frac{2}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \boxed{\frac{1}{32}}$$

(2) 取り出した球の色が種類が，赤と青のちょうど 2 種類となるような取り出し方は,「5 回とも赤か青いずれかの球を取り出す」取り出し方のうち,「5 回ともすべて赤」でも「5 回ともすべて青」でもないものである.

「5 回とも赤か青いずれかの球を取り出す」確率は(1)より $\dfrac{1}{32}$，5 回とも赤である確率と，5 回とも青である確率は等しく，ともに

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$$

なので，求める確率は

$$\frac{1}{32} - \frac{1}{1024} - \frac{1}{1024} = \frac{30}{1024} = \boxed{\frac{15}{512}}$$

(3) 取り出した球の色の種類が 2 種類になるのは,

d) 赤，青
e) 赤，黒
f) 赤，白
g) 青，黒
h) 青，白
i) 白，黒

のいずれかの場合であり，$6\,(= {}_4\mathrm{C}_2)$ 通り.

いずれの場合にも，取り出した球の色の種類がその 2 種類になる確率は, (2)と同じ $\dfrac{15}{512}$ なので，求める確率は

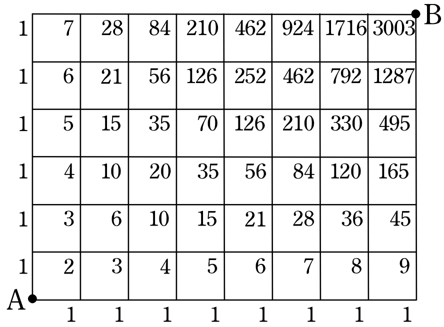
$$\frac{15}{512} \times 6 = \boxed{\frac{45}{256}}$$

宿題 3-5

(1) A から B までは，右に 8 回，上に 6 回の計 14 回進む．進み方は，14 回進むうちの，どの 6 回を上に進んだか，で決まるので，その総数は

$$ {}_{14}C_6 = \frac{14\times13\times12\times11\times10\times9}{6\times5\times4\times3\times2\times1} = \boxed{3003} $$

※ 次のようにも数えられる．



(2) P も Q も通るのは，まず A から P まで進み，そこから Q まで進み，B に進む場合のみである．(1)と同様にして，

A から P までの進み方が ${}_5C_2 = 10$ 通り

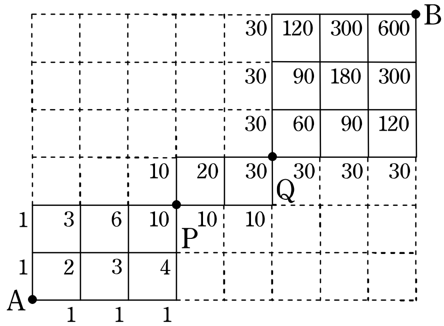
P から Q までの進み方が ${}_3C_1 = 3$ 通り

Q から B までの進み方が ${}_6C_3 = 20$ 通り

あるので，求める進み方の総数は

$10\times3\times20 = \boxed{600}$

※ 次のようにも数えられる．



(3) A から B までの進み方の総数は，(1)より 3003 である．このうち，

P を通る進み方の総数は，

A から P までの進み方が ${}_5C_2 = 10$ 通り

P から B までの進み方が ${}_9C_4 = 126$ 通り

あるので，$10\times126 = 1260$．

Q を通る進み方の総数は，

A から Q までの進み方が ${}_8C_3 = 56$ 通り

Q から B までの進み方が ${}_6C_3 = 20$ 通り

あるので，$56\times20 = 1120$．

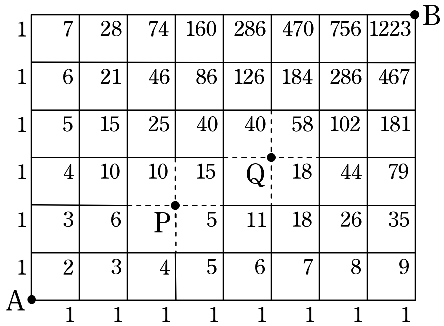
P も Q も通る進み方の総数は，(2)で既に求めた通り，600.

以上を踏まえて，次のような表を得る．

	Pを通る	通らない	
Qを通る	$\boxed{600}$	520	$\boxed{1120}$
通らない	660	1223	1883
	$\boxed{1260}$	1743	$\boxed{3003}$

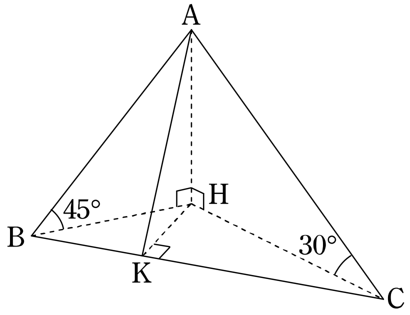
したがって，P も Q も通らない進み方の総数は，$\boxed{1223}$．

※ 次のようにも数えられる．



宿題 3-6

$\angle$HBC，$\angle$HCB は鋭角なので，H から直線 BC に下した垂線の足 K は辺 BC 上にある．



AH は面 HBC と垂直なので, AH$\perp$BC であり，BC は AH，HK と垂直なので，平面 AHK と垂直．よって，BC$\perp$AK であり，$\angle$AKH は面 ABC と HBC のなす角であるから，

$\angle\mathrm{AKH}=60°$

である．

(1) 三角形 ABH は直角二等辺三角形なので，

$\mathrm{BH}=\mathrm{AH}=x$

三角形 ACH は 30°,60°,90° の三角定規の形なので，

$\mathrm{CH}=\sqrt{3}\,\mathrm{AH}=\sqrt{3}\,x$

三角形 AKH も 30°,60°,90° の三角定規の形なので，

$$\mathrm{HK}=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{AH}=\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

直角三角形 HBK でピタゴラスの定理より

$$\mathrm{BK}^2+\mathrm{HK}^2=\mathrm{HB}^2$$
$$\mathrm{BK}^2=\mathrm{HB}^2-\mathrm{HK}^2$$
$$=x^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)^2=\frac{2}{3}x^2$$

$$\therefore \mathrm{BK}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x=\frac{\sqrt{6}}{3}x\ (>0)$$

同様にして，直角三角形 HCK でピタゴラスの定理より

$$\mathrm{CK}^2=\mathrm{CH}^2-\mathrm{HK}^2$$
$$=(\sqrt{3}\,x)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)^2=\frac{8}{3}x^2$$

$$\therefore \mathrm{CK}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x=\frac{2\sqrt{6}}{3}x\ (>0)$$

よって，

$$\mathrm{BC}=\mathrm{BK}+\mathrm{CK}=\frac{\sqrt{6}}{3}x+\frac{2\sqrt{6}}{3}x=\boxed{\sqrt{6}\,x}$$

(2) 三角形 HBC において，余弦定理より

$$\cos(\angle\mathrm{BHC})=\frac{\mathrm{BH}^2+\mathrm{CH}^2-\mathrm{BC}^2}{2\times\mathrm{BH}\times\mathrm{CH}}$$
$$=\frac{x^2+(\sqrt{3}\,x)^2-(\sqrt{6}\,x)^2}{2\times x\times\sqrt{3}\,x}$$
$$=\frac{-2x^2}{2\sqrt{3}\,x^2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\therefore \cos(\angle\mathrm{BHC})<0$

であるから，$\angle$BHC は $\boxed{\text{鈍角}}$ である．

(3) $\mathrm{BC}=3\sqrt{2}$ のとき，

$$\sqrt{6}\,x=3\sqrt{2}\qquad\therefore x=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\sqrt{3}$$

三角錐 A-BCH の体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{HBC}\times\mathrm{AH}$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\mathrm{BC}\times\mathrm{HK}\times\mathrm{AH}$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}x\times x$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}x^2=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\times(\sqrt{3})^2=\boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$