中3数学D　宿題解答　1学期-6

宿題 6-1

(1) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

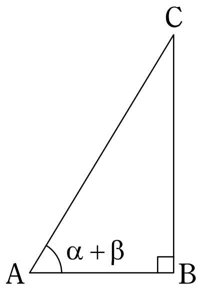
$$=\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}-\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}=\boxed{\frac{33}{65}}$$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}=\boxed{\frac{56}{65}}$$

(2) $\mathrm{BC}:\mathrm{CA}:\mathrm{AB}=\sin(\alpha+\beta):1:\cos(\alpha+\beta)$

$$=\frac{56}{65}:1:\frac{33}{65}=\boxed{56:65:33}$$



(3) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$

$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}+\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}=\boxed{\frac{63}{65}}$$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$

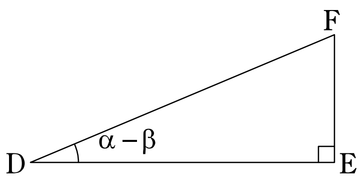
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}-\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}=\boxed{\frac{16}{65}}$$

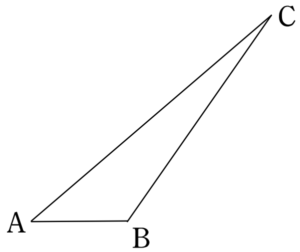
であるから，

$\mathrm{EF}:\mathrm{FD}:\mathrm{DE}=\sin(\alpha-\beta):1:\cos(\alpha-\beta)$

$$=\frac{16}{65}:1:\frac{63}{65}=\boxed{16:65:63}$$



宿題 6-2



(1) $(\sin A)^2=1-(\cos A)^2=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$

$\sin A>0$ なので，　$\sin A=\boxed{\frac{\sqrt{7}}{4}}$

$(\sin B)^2=1-(\cos B)^2=1-\left(-\frac{9}{16}\right)^2=\frac{25\times 7}{16^2}$

$\sin B>0$ なので，　$\sin B=\boxed{\frac{5\sqrt{7}}{16}}$

(2) 三角形 ABC の内角の和より，

$C=180^\circ-(A+B)$

なので，

$\sin C=\sin(180^\circ-(A+B))$

$$=\sin(A+B)$$

$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{4}\times\left(-\frac{9}{16}\right)+\frac{3}{4}\times\frac{5\sqrt{7}}{16}=\boxed{\frac{3\sqrt{7}}{32}}$$

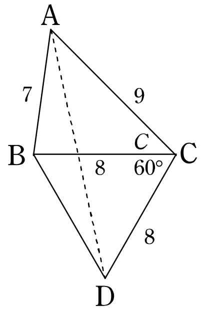
(3) 三角形 ABC において，正弦定理より，

$\mathrm{BC}:\mathrm{CA}:\mathrm{AB}=\sin A:\sin B:\sin C$

$$=\frac{\sqrt{7}}{4}:\frac{5\sqrt{7}}{16}:\frac{3\sqrt{7}}{32}$$

$$=\boxed{8:10:3}$$

宿題 6-3



(1)　三角形 ABC において，余弦定理より，

$$\cos C = \frac{8^2 + 9^2 - 7^2}{2 \times 8 \times 9} = \frac{96}{2 \times 8 \times 9} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$(\cos C)^2 + (\sin C)^2 = 1$ なので，

$$(\sin C)^2 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

$$\therefore \sin C = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{3}} \ (> 0)$$

(2)　三角形 ACD において，余弦定理より，

$$AD^2 = 8^2 + 9^2 - 2 \times 8 \times 9 \times \cos \angle ACD$$

ここで，加法定理より，

$$\begin{aligned} &\cos \angle ACD \\ &= \cos(C + 60^\circ) \\ &= \cos C \cos 60^\circ - \sin C \sin 60^\circ \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 - \sqrt{15}}{6} \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} AD^2 &= 8^2 + 9^2 - 2 \times 8 \times 9 \times \frac{2 - \sqrt{15}}{6} \\ &= 64 + 81 - 24(2 - \sqrt{15}) \\ &= 97 + 24\sqrt{15} \end{aligned}$$

よって，$AD = \boxed{\sqrt{97 + 24\sqrt{15}}} \ (> 0)$

※　この二重根号は外れません．

宿題 6-4

(1)　それぞれの確率は以下のようにして計算できる．

$$X = 1 \ : \ \frac{2}{7}$$

$$X = 2 \ : \ \frac{5}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{5}{21}$$

$$X = 3 \ : \ \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{21}$$

$$X = 4 \ : \ \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{7}$$

$$X = 5 \ : \ \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{21}$$

$$X = 6 \ : \ \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{21}$$

よって，以下の表を得る．

X	1	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$	1

(2)　X の期待値は，

$$1 \times \frac{2}{7} + 2 \times \frac{5}{21} + 3 \times \frac{4}{21} + 4 \times \frac{1}{7} + 5 \times \frac{2}{21} + 6 \times \frac{1}{21}$$

$$= \frac{6 + 10 + 12 + 12 + 10 + 6}{21} = \frac{56}{21} = \boxed{\frac{8}{3}}$$

宿題 6-5

(1) あらかじめ4個の×を並べておいて，後から8個の○を加えて記号列を作ることにする.「×が隣り合わない」という条件を満たすように○を加えるには，下図の空欄(B), (C), (D)にそれぞれ1個以上の○を加えればよい.

$$\underbrace{\boxed{\text{(A)}}}_{a\text{個}} \times \underbrace{\boxed{\text{(B)}}}_{1+b\text{個}} \times \underbrace{\boxed{\text{(C)}}}_{1+c\text{個}} \times \underbrace{\boxed{\text{(D)}}}_{1+d\text{個}} \times \underbrace{\boxed{\text{(E)}}}_{e\text{個}}$$

そこで，(A), (B), (C), (D), (E)に加える○の個数をそれぞれ $a,\ 1+b,\ 1+c,\ 1+d,\ e$ 個とすれば，求める並べ方の総数は

$$a+(1+b)+(1+c)+(1+d)+e=8$$

$$\therefore a+b+c+d+e=5$$

を満たす0以上の整数 (a,b,c,d,e) の総数である．これは前回の宿題 5-5 と同様にして，5 個の○と 4 個の+を並べてできる記号列の総数として数えられるので，

$${}_9\mathrm{C}_4=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=\boxed{126}$$

※ より直接的に，次のようにして数えることもできる.

［別解］

8 個の○を並べておいて，その両端または隙間（下図の9か所）から4か所を選んで×を挿入することで，×同士が隣り合わない並べ方を得る.

$$\underbrace{\ }_{①}○\underbrace{\ }_{②}○\underbrace{\ }_{③}○\underbrace{\ }_{④}○\underbrace{\ }_{⑤}○\underbrace{\ }_{⑥}○\underbrace{\ }_{⑦}○\underbrace{\ }_{⑧}○\underbrace{\ }_{⑨}$$

よって，条件を満たす並べ方は，×を挿入する4か所の選び方の数だけあるので，その総数は

$${}_9\mathrm{C}_4=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=\boxed{126}$$

(2) 条件を満たすような四角形の4つの頂点は，正十二角形の，どの2つも隣り合わないような4頂点に他ならない．したがって，正十二角形の頂点に，順に1, 2, 3, …, 12と番号を振ると，条件を満たすような四角形の頂点の選び方に対応するのは，「1, 2, 3, …, 12から，どの2つも連続せず，かつ，1と12を同時に選ばないような4数を選ぶ選び方」である.

(1)より，1, 2, 3, …, 12からどの2つも連続しないような4数を選ぶ方法は，全部で126通りある.

このうち，1と12を同時に選んでいるものは，残り２数が「3, 4, 5, …, 10のうちの連続しない２数」となっているものである．その総数は，「6個の○と2個の×を，×同士が隣り合わないように並べる方法」の総数であるので，(1)と同様にして数えることができ，

$${}_7\mathrm{C}_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$$

である．よって，求める四角形の総数は

$$126-21=\boxed{105}$$

宿題 6-6

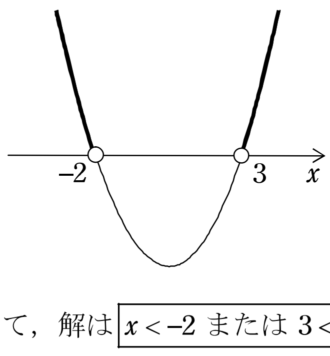
(1) $f(x)=x^2-x-6$ とおく.

不等式 $f(x)>0$ の解は，$y=f(x)$ のグラフのうち，y 座標が正となる部分の，x 座標の取りうる範囲である.

$y=f(x)$ のグラフは，下に凸な放物線で，

$$f(x)=(x+2)(x-3)$$

より，x 切片は$-2, 3$なので，概形は下図の通り.



よって，解は $\boxed{x<-2 \text{ または } 3<x}$

(2)　$f(x)=2x^2-4x+1$ とおく．
不等式 $f(x)<0$ の解は，$y=f(x)$ のグラフのうち，y 座標が負となる部分の，x 座標が取りうる範囲である．
$y=f(x)$ のグラフは，下に凸な放物線で，

$$\begin{aligned} f(x)&=2x^2-4x+1\\ &=2\left(x^2-2x+\frac{1}{2}\right)\\ &=2\left(x^2-2x+1-1+\frac{1}{2}\right)\\ &=2\left\{(x-1)^2-\frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

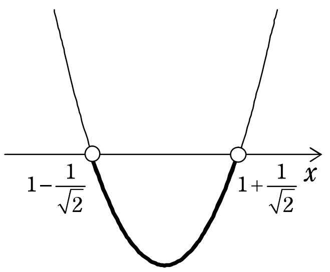
より，x 切片は

$$(x-1)^2=\frac{1}{2}$$

$$x-1=\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore x=1+\frac{1}{\sqrt{2}},1-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

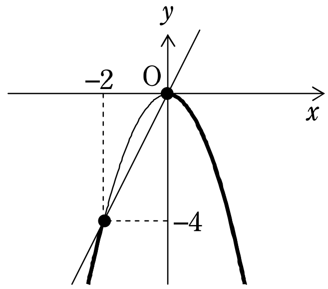
なので，概形は下図の通り．



よって，解は $\boxed{1-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$

(3)　$-x^2\leqq 2x$

［解法 I］
不等式の解は，$y=-x^2$ のグラフのうち，$y=2x$ のグラフの下側（直線上を含む）にある部分の x 座標が取りうる範囲である．
$y=-x^2$ と $y=2x$ のグラフを描くと，下図のようになる（略）．



よって，解は $\boxed{x\leqq -2 \text{ または } 0\leqq x}$

［解法 II］
不等式は

$$0\leqq x^2+2x$$

と書き換えられるので，

$$f(x)=x^2+2x$$

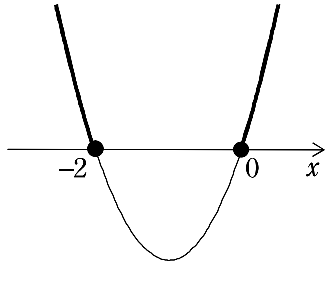
とおくと，この不等式の解は

$$y=f(x)$$

のグラフのうち，y 座標が 0 以上となる部分の，x 座標が取りうる範囲である．
$y=f(x)$ のグラフは，下に凸な放物線で，

$$f(x)=x(x+2)$$

より，x 切片は $0,-2$ なので，概形は下図の通り．



よって，解は $\boxed{x\leqq -2 \text{ または } 0\leqq x}$