

中3数学C 解の配置 練習問題

練習1 $x^2 + 2x + 5a = 0 \cdots \textcircled{1}$ という x の2次方程式について以下の問に答えよ。

- (1) $\textcircled{1}$ が $-2 < x < 1$ の範囲に少なくともひとつ解を持つような a の範囲を求めよ。
- (2) $\textcircled{1}$ が $-2 < x < 1$ の範囲に異なる2つの解を持つような a の範囲を求めよ。

練習 2 x の 2 次方程式 $x^2 - 4ax + 4a^2 - 1 = 0 \cdots \textcircled{3}$ が $x < 2$ の範囲に 2 解 (重解を含む) をもつような a の範囲を求めよ。

練習 3 x の 2 次方程式 $x^2 - 4ax + 5a = 0 \cdots \textcircled{1}$ が $1 < x < 5$ の範囲に 2 解 (重解を含む) をもつような a の範囲を求めよ。

[解答は裏面]

2 次方程式の解の配置

x の 2 次方程式 $x^2 + 2x + 5a = 0 \cdots \textcircled{1}$

の実数解は、 $y = x^2 + 2x + 5a \cdots \textcircled{2}$ という 2 次関数のグラフ (放物線) の x 切片と一致する。
このことを利用して、練習 1 を解こう。(練習 2, 練習 3 も同様)

練習 1

$y = x^2 + 2x + 5a \cdots \textcircled{2}$ は $y = (x + 1)^2 - 1^2 + 5a = (x + 1)^2 + 5a - 1$ と変形できるので、
 $\textcircled{2}$ のグラフは頂点が $A(-1, 5a - 1)$ である下に凸な放物線とわかる。

a の値が十分大きいと、 $\textcircled{2}$ のグラフは x 軸と共有点を持たない。

a の値を小さくしていくと、 $\textcircled{2}$ のグラフは下方方向に移動し、(ア) x 軸と $x = -1$ で接する。

さらに a を小さくしていくと、(イ) $\textcircled{2}$ のグラフは $x = -2$ で x 軸と交わり、

さらに a を小さくしていくと、(ウ) $\textcircled{2}$ のグラフは $x = 1$ で x 軸と交わる。

(ア) となるのは、(頂点の y 座標) が 0 のときで、

$5a - 1 = 0$ すなわち $a = \frac{1}{5}$ のとき。

(イ) となるのは、

$\textcircled{2}$ で $x = -2, y = 0$ を代入して

$$0 = (-2)^2 + 2(-2) + 5a$$

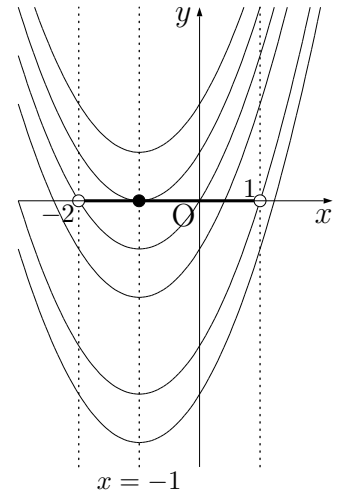
$a = 0$ のとき。

(ウ) となるのは、

$\textcircled{2}$ で $x = 1, y = 0$ を代入して

$$0 = 1^2 + 2 \cdot 1 + 5a$$

$a = -\frac{3}{5}$ のとき。



(1) $\textcircled{1}$ が $-2 < x < 1$ の範囲に少なくともひとつ解を持つのは、

$\textcircled{2}$ のグラフが x 軸の $-2 < x < 1$ の部分と少なくとも 1 つ共有点を持つとき。

それは、上記の (ア) から (ウ) の直前までであり、求める a の範囲は

$$-\frac{3}{5} < a \leq \frac{1}{5}$$

(頂点の y 座標が 0 以下 かつ $x = 1$ での y 座標が 0 より大のとき、と考えてもよい)

(2) $\textcircled{1}$ が $-2 < x < 1$ の範囲に異なる 2 つの解を持つのは、

$\textcircled{2}$ のグラフが x 軸の $-2 < x < 1$ の部分と異なる 2 点で交わる時。

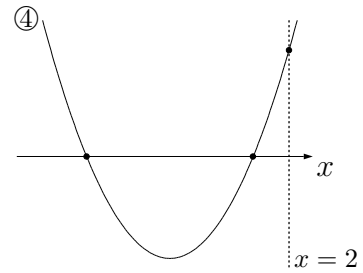
それは、上記の (ア) の直後から (イ) の直前までであり、求める a の範囲は

$$0 < a < \frac{1}{5}$$

(頂点の y 座標が 0 より小 かつ $x = -2$ での y 座標が 0 より大のとき、と考えてもよい)

練習 2

x の 2 次方程式 $x^2 - 4ax + 4a^2 - 1 = 0 \cdots ③$ が $x < 2$ の範囲に 2 解 (重解を含む) をもつのは、
 $y = x^2 - 4ax + 4a^2 - 1 \cdots ④$ のグラフが、
 右図のようなとき。



そうなるのは、

$$\begin{cases} x = 2 \text{ での } y \text{ が正} \\ \text{頂点の } y \text{ 座標が } 0 \text{ 以下} \\ \text{頂点の } x \text{ 座標が } 2 \text{ より小} \end{cases} \quad \text{のとき。}$$

④ は、 $y = (x - 2a)^2 - 1$ と変形できるので、

$$\begin{cases} 4 - 8a + 4a^2 - 1 > 0 \\ -1 \leq 0 \text{ (これは成立)} \\ 2a < 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 4a^2 - 8a + 3 > 0 \\ a < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} (2a - 1)(2a - 3) > 0 \\ a < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < \frac{1}{2} \text{ または } a > \frac{3}{2} \\ a < 1 \end{cases} \quad \text{より、求める } a \text{ の範囲は } \boxed{a < \frac{1}{2}}$$

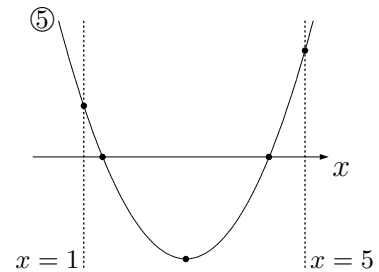
<注意> 「頂点の x 座標が 2 より小」という条件を考えないと、間違えてしまう。

練習 3

$y = x^2 - 4ax + 5a \cdots ⑤$ のグラフが x 軸の $1 < x < 5$ の部分と異なる 2 カ所で交わるか、
 接するときに注目。

$$\begin{cases} \text{頂点の } x \text{ 座標が } 1 \text{ と } 5 \text{ の間} \\ \text{頂点の } y \text{ 座標が } 0 \text{ 以下} \\ x = 1 \text{ での } y \text{ が正} \\ x = 5 \text{ での } y \text{ が正} \end{cases} \quad \cdots \#$$

となる a の範囲が求めるもの。



⑤ が $y = (x - 2a)^2 - (2a)^2 + 5a$ と平方完成できるので、頂点の座標は $(2a, -4a^2 + 5a)$

よって、# の条件を整理すると、

$$\begin{cases} 1 < 2a < 5 \\ -4a^2 + 5a \leq 0 \\ 1 - 4a + 5a > 0 \\ 25 - 20a + 5a > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2} < a < \frac{5}{2} \\ a \leq 0 \text{ または } a \geq \frac{5}{4} \\ a > -1 \\ a < \frac{5}{3} \end{cases}$$

と表すことができ、求める a の範囲は $\boxed{\frac{5}{4} \leq a < \frac{5}{3}}$ とわかる。