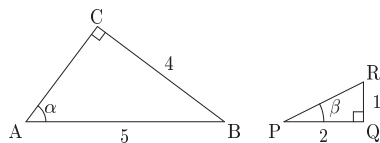


－ 中3C 宿題プリント(1学期-7) 解答－

宿題 7-1

右図の角 α, β について、
以下の問に答えよ。



(1) $\cos \alpha, \sin \alpha, \cos \beta, \sin \beta$
を求めよ。

(2) $\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta)$
を求めよ。

(3) $\cos(2\beta)$ を求めよ。
(Hint. $2\beta = \beta + \beta$)

(4) α, β はどんな関係にあるか？

(1) ピタゴラスの定理より、

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$PR = \sqrt{PQ^2 + QR^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

であることから

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}, \sin \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \beta = \frac{PQ}{PR} = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(= \frac{2\sqrt{5}}{5} \right),$$

$$\sin \beta = \frac{QR}{PR} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(= \frac{\sqrt{5}}{5} \right)$$

(2) (1) の結果より、加法定理を用いて

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{4}{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5\sqrt{5}} \left(= \frac{2\sqrt{5}}{25} \right)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{11}{5\sqrt{5}} \left(= \frac{11\sqrt{5}}{25} \right)$$

(3) (1) の結果より、加法定理を用いて

$$\cos(2\beta) = \cos(\beta + \beta) = \cos \beta \cos \beta - \sin \beta \sin \beta$$

$$= (\cos \beta)^2 - (\sin \beta)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 = \frac{3}{5}$$

(4) (1), (3) の結果から、 $\cos \alpha = \cos(2\beta)$ である。

α, β は鋭角であるから、 $\alpha, 2\beta$ はともに 0° と 180° の間の角なので、 $\cos$ の値が一致していることより、

$$\alpha = 2\beta \text{ が成立している。}$$

宿題 7-2

三角形 ABC について、 $AC = \sqrt{5}, BC = \sqrt{13}, \sin A = \frac{2}{\sqrt{5}}$ だとする。

以下の問に答えよ。

(1) $\sin B$ を求めよ。

(2) 三角形 ABC の外接円の半径 R を求めよ。

(3) A, B は鋭角だとする。 $C = 180^\circ - (A + B)$ に注目して、 $\sin C$ を求めよ。

(1) 正弦定理より、

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{\sin B}$$

$$\sin B = \sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

(2) 正弦定理より、

$$2R = \frac{BC}{\sin A} = \frac{\sqrt{13}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$$

$$\therefore R = \frac{\sqrt{65}}{4}$$

(3) A, B は鋭角なので、 $\cos$ の値は正である。

よって、前提および (1) の結果より、

$$\begin{aligned} \cos A &= \sqrt{1 - (\sin A)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos B &= \sqrt{1 - (\sin B)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{4}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

$$\sin C = \sin(180^\circ - (A + B))$$

$$= \sin(A + B) \quad (\text{補角公式より})$$

$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B \quad (\text{加法定理より})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{65}}$$

宿題 7-3

2 次関数 $y = x^2 + 2x + 3$ の、次の範囲での値域をそれぞれ求めよ。

- (1) $x \geq 0$
- (2) $x \leq 0$
- (3) $-3 \leq x \leq -2$
- (4) $-3 \leq x \leq 0$
- (5) $-3 \leq x \leq 2$

2 次関数 $y = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$ のグラフは、下に凸な放物線で、頂点が $(-1, 2)$ である。

- (1) $x \geq 0$ の範囲に頂点が含まれていなくて、この範囲で y は x について単調増加。

$x = 0$ のとき $y = 3$ なので、

求める値域は $y \geq 3$ (3 以上のすべての実数)

- (2) $x \leq 0$ の範囲に頂点が含まれていることに注意。

求める値域は $y \geq 2$ (2 以上のすべての実数)

- (3) $-3 \leq x \leq -2$ という区間は、頂点よりも左側にある。この範囲で y は x について単調減少。

$x = -3$ のとき $y = (-3)^2 + 2(-3) + 3 = 6$

$x = -2$ のとき $y = (-2)^2 + 2(-2) + 3 = 3$

なので、求める値域は $3 \leq y \leq 6$

- (4) $-3 \leq x \leq 0$ の範囲に頂点が含まれていることに注意。

$x = -3$ のとき $y = 6$

$x = 0$ のとき $y = 3$

で左端の高さの方が高い。

よって、求める値域は $2 \leq y \leq 6$

- (5) $-3 \leq x \leq 2$ の範囲に頂点が含まれていることに注意。

$x = -3$ のとき $y = 6$

$x = 2$ のとき $y = 2^2 + 2 \cdot 2 + 3 = 11$

で右端の高さの方が高い。

よって、求める値域は $2 \leq y \leq 11$

補足

$y = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$ のグラフは、頂点 $(-1, 2)$ を通る y 軸平行な直線 $x = -1$ に関して線対称である。

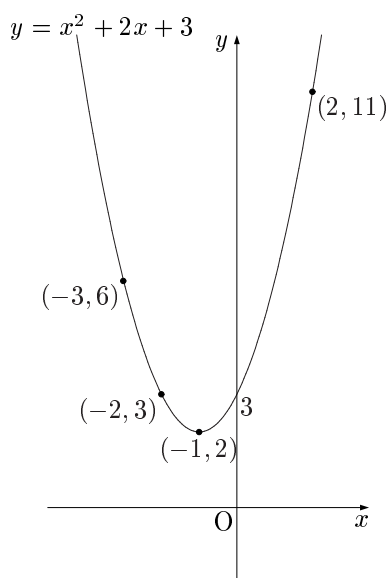
したがって、注目している x の範囲に頂点が含まれている場合、 $x = -1$ からより遠く離れた方の端の高さの方が高くなる。

これに注目すると、

$$(-1) - (-3) = 2$$

$$2 - (-1) = 3$$

なので、 $x = 2$ の方がより遠いので、右端の高さの方が高いとわかる。



宿題 7-4

次の2次不等式を解け。

(1) $x^2 \geq 3x$

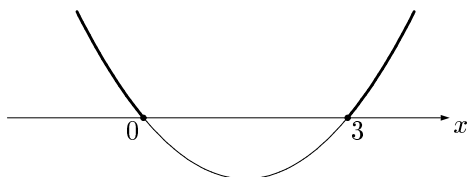
(2) $x^2 - 3x + 4 > 0$

(3) $x^2 - 2x - 4 \leq 0$

(4) $-x^2 + 6x - 9 < 0$

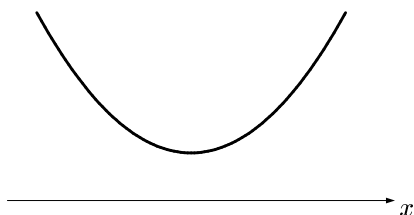
- (1) $x^2 \geq 3x \cdots \textcircled{1}$ という不等式は $x^2 - 3x \geq 0$ と変形できる。

$y = x^2 - 3x = x(x-3)$ のグラフは下図のようであり、このグラフの $y \geq 0$ の部分に注目して、不等式 $\textcircled{1}$ の解は $x \leq 0, x \geq 3$



- (2) $y = x^2 - 3x + 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$ のグラフは下図のよう。

このグラフの $y > 0$ の部分に注目して、不等式 $x^2 - 3x + 4 > 0$ の解は 全実数。



- (3) $x^2 - 2x - 4 = 0$ となる x の値は

$$(x-1)^2 - 1^2 - 4 = 0$$

$$(x-1)^2 = 5$$

$$x-1 = \pm\sqrt{5}$$

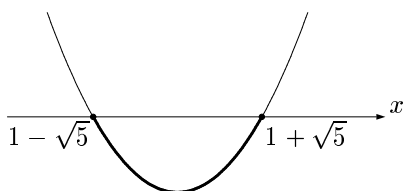
$$x = 1 \pm \sqrt{5}$$

である。

したがって、 $y = x^2 - 2x - 4$ のグラフは下図のよう
で、このグラフの $y \leq 0$ の部分に注目して、

不等式 $x^2 - 2x - 4 \leq 0$ の解は

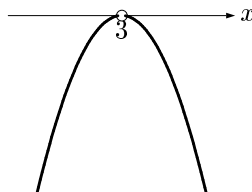
$$1 - \sqrt{5} \leq x \leq 1 + \sqrt{5}$$



- (4) $y = -x^2 + 6x - 9 = -(x^2 - 6x + 9) = -(x-3)^2$ のグラフは下図のよう。

このグラフの $y < 0$ の部分に注目して、不等式 $-x^2 + 6x - 9 < 0$ の解は

$$x < 3, x > 3 \quad (x \neq 3 \text{ でも可。})$$



宿題 7-5

あたりが 2 本、はずれが 3 本の計 5 本のくじが袋に入っている。袋からくじを無作為に 1 本ずつ引き、引いたくじは元に戻さないものとする。はじめてあたりを引くまでに引いたくじの本数を X とする。

- (1) 次の表を完成させよ。

X の値	1	2	3	4	計
その確率					

- (2) X の期待値を求めよ。

- (1) $X = 1$ となる確率は $\frac{2}{5}$

$$X = 2 \text{ となる確率は } \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

$$X = 3 \text{ となる確率は } \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$$

$$X = 4 \text{ となる確率は } \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{10}$$

以上の確率の値を合計すると、

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{4+3+2+1}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

したがって、

X の値	1	2	3	4	計
その確率	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

- (2) X の期待値は、

$$\begin{aligned} & 1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{1}{10} \\ &= \frac{2+3+3+2}{5} = \boxed{2} \end{aligned}$$